

Приложение к журналу

КВАНТ

№6/98

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ
ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ

Бюро



Квантум

П Р И Л О Ж Е Н И Е
к журналу **КВАНТ** №6/1998

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ
ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ



Москва 1998
Бюро «Квантум»

УДК 51
ББК 22.1

Приложение
к журналу «Квант»
№6/98

В19 Н.Б.ВАСИЛЬЕВ. ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ. — М.: Бюро Квантум, 1998. — 128 с. (Прил. к журналу «Квант» №6/98)

ISBN 5-85843-015-5

Книга представляет собой сборник статей одного из лучших авторов «Кванта» Н.Б.Васильева, опубликованных в журнале в разные годы. Статьи сборника посвящены самым разным разделам математики, их содержание выходит за рамки школьной программы, но изложение доступно школьникам старших классов.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для руководителей и участников математических кружков, а также для всех, кто интересуется математикой.

ББК 22.1

ISBN 5-85843-015-5



© Бюро Квантум
«Квант», 1998

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Кривые дракона	5
Метрические пространства	16
Расстановка кубиков	30
Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики	38
Последовательность прыжков	47
Плавные последовательности	57
Арифметические препятствия	66
Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения	80
Пары чисел и действия с ними	93
Гексаграммы Паскаля и кубические кривые	106
Комбинаторика – многочлены – вероятность	118
Статьи Н.Б.Васильева в журнале «Квант»	127



ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга дань памяти. В ней собраны статьи Николая Борисовича Васильева – одного из «отцов-основателей» «Кванта», человека, неутомимо работавшего на благо математического просвещения нашей страны в течение почти сорока лет.

Будучи великолепно образованным математиком, тонко чувствуя красоту нашей науки, Николай Борисович стремился донести до юных читателей все ее великолепие.

Некоторые из статей были написаны им в соавторстве с известными математиками, которые часто просили его о совместной работе над темами труднодоступными, далеко выходящими за рамки школьной программы, зная, что никто, кроме Николая Борисовича, не сумеет более ярко, популярно и в то же время без каких бы то ни было отступлений от безукоризненной математической строгости раскрыть всю глубину содержания, выделить главное, обнаружить «изюминку». Многие ныне известные математики говорили, что их путь в науку начинался с чтения журнала «Квант» и не в последнюю очередь со знакомства со статьями Н.Б.Васильева.

В эту книгу вошли несколько статей, посвященных самым разным темам – здесь и геометрия, и теория вероятностей, и комбинаторика. Надеемся, что вам доставит удовольствие знакомство с этими великолепными образцами научно-популярной литературы.

КРИВЫЕ ДРАКОНА

Что такое кривая и ломаная дракона

Возьмите длинную полоску бумаги, сложите ее пополам и еще раз пополам. Сложенную полоску положите ребром на стол и разверните так, чтобы угол при каждом сгибе был равен 90° (рис.1). Если смотреть сверху, то видна ломаная линия, изображенная на рисунке 2, а или б.

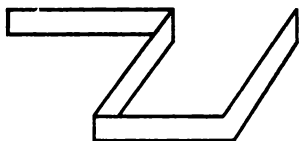


Рис. 1

При трех складываниях полоски пополам уже получаются существенно различные ломаные (рис.3, в или г) в зависимости от того, как складывается полоска. Если полоску складывать четыре раза и больше, а затем разворачивать ее сгибы до прямых углов, мож-

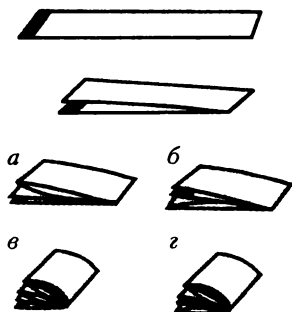


Рис. 2

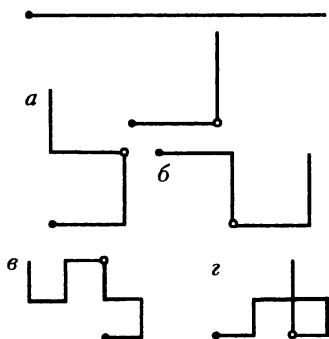


Рис. 3

но получить много различных ломаных. На рисунке 4 показана одна из ломаных, получающихся при пяти складываниях пополам.

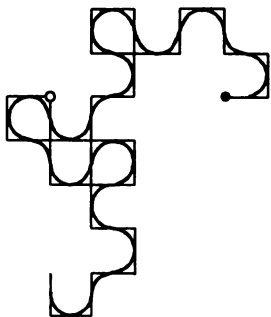


Рис. 4

Практически вам не удастся сложить полосу бумаги больше семи раз – ведь уже при восьмом складывании получилось бы $2^8 = 256$ слоев! Однако мы скоро научимся рисовать довольно длинные такие ломаные, обходясь без полоски. На этой странице уже нарисована одна из ломаных, которая получилась бы, если бы мы складывали полосу 12 раз. Он состоит из $2^{12} = 4096$ звеньев.

Легко убедиться в том, что если складывать полосу более трех раз, то после разворачивания некоторые ее углы обязательно будут «касаться» друг друга (рис.3,г и рис.4). Из-за многочисленных

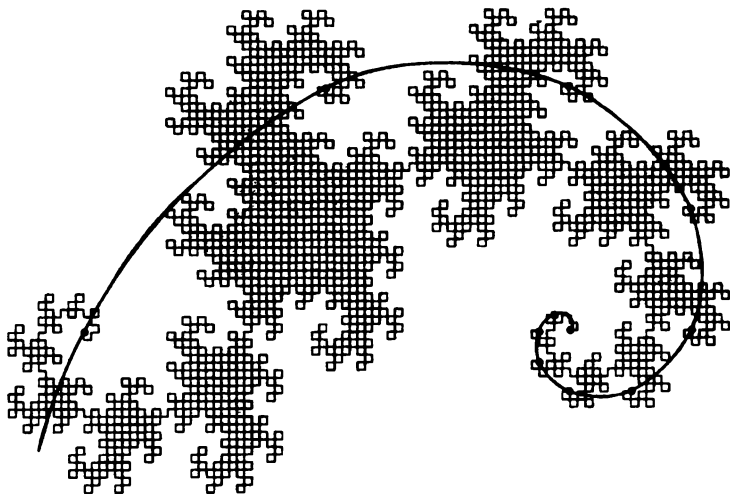


Рис. 5. Такая ломаная («Главная ломаная дракона») получается, если начиная с отрезка каждый раз поворачивать предыдущую ломаную в одну и ту же сторону. (Это соответствует способу складывания пополам, показанному на рис.2,а, в; здесь полоска каждый раз загибается «справа вверх налево».) На рисунке 4 изображено начало этой ломаной (32 звена), на этом рисунке – 4096 звеньев. Если ломаную продолжать таким же образом дальше, то она будет медленно обходить вокруг своего начала, делая один полный оборот за «удвоений». Выделенные точки лежат на логарифмической спирали (для тех, кто знаком с полярной системой координат, мы можем написать ее уравнение: $\varphi = \log_a r$, где r , φ – полярные координаты; $a = a^{2^n}$).

таких касаний на длинных ломаных местами получается сетка. Чтобы разобраться, как идет ломаная, можно закруглить у нее углы (так, как показано на рис.4). Если проделать это для ломаной, изображенной на рисунке 4, то получится замысловатая линия (рис.5). Этот рисунок и подсказал американскому физику Джону Хейвею (Heighway) название «кривые дракона». Тот, кто когда-нибудь видел дракона, мог бы подтвердить, что он выглядит именно так.

Как рисовать длинные ломаные дракона?

Мы будем называть любую ломаную, полученную из бумажки, сложенной пополам n раз, разворачиванием сгибов до 90° , *ломаной дракона ранга n* . Выясним, как устроены ломаные дракона и как их рисовать для достаточно больших n .

Первый способ.

Ломаная дракона ранга n состоит из 2^n звеньев и соответственно имеет $2^n - 1$ вершин (не считая концов). Таким образом, у нее есть **средняя вершина** (при $n > 0$), поскольку число вершин нечетно. На рисунках 3 и 4 у каждой ломаной средняя вершина отмечена белым кружочком. Можно подметить, что каждая из этих ломаных состоит из двух одинаковых кусков, получающихся друг из друга поворотом на 90° . Оказывается, **это общая закономерность**.

Теорема 1. Если продолжить любую ломаную дракона ранга n с концом в точке O точно такой же ломаной, полученной из данной поворотом на 90° вокруг точки O , то получится ломаная дракона ранга $n + 1$, и обратно, любая ломаная драко-

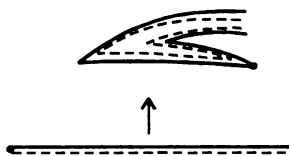


Рис. 6

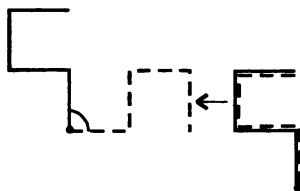


Рис. 7

на ранга $n + 1$ получается из некоторой ломаной ранга n этим способом.

В самом деле, допустим, мы хотим сложить полоску $n + 1$ раз пополам. Сложим ее сначала один раз пополам. Тогда две ее половинки совпадут и при дальнейших складываниях будут сгибаться пополам совершенно одинаково (рис.6). Теперь развернем на 90° последние n сгибов полоски. Получим две совпадающие ломаные дракона

ранга n ; остается развести их на 90° — и мы получим ломаную дракона ранга $n + 1$ (рис.7). Подумайте, как из этих соображений вывести оба утверждения теоремы 1.

Пользуясь теоремой 1, легко рисовать длинные ломаные дракона.

Поскольку любая ломаная дракона идет по линиям квадратной сетки, ее удобно рисовать на клетчатой бумаге.

Возьмем любую короткую ломаную дракона (например, просто отрезок). Условимся, что одна из ее крайних точек — начало, а другая — конец. Продолжим ее такой же ломаной, повернутой относительно ее конца на 90° по (или против) часовой стрелке. Полученную новую ломаную таким же способом продолжаем от конца; так проделываем столько раз, сколько захочется и сколько сможем. Это автоматически и быстро можно делать, если под рукой есть калька или, еще лучше, слегка прозрачная клетчатая бумага. (Подумайте, как!)

Очевидно, точно так же мы можем сразу рисовать и **кривые** дракона: нужно только каждый раз закруглять средний сгиб.

Замечательное свойство всех кривых дракона заключается в том, что *они сами себя не пересекают*, или, что то же самое, *ломаные дракона никогда не проходят по одному и тому же отрезку дважды*. Таким образом, хотя ломаная дракона может дважды проходить через одну и ту же точку (вершину сетки), но более двух раз она в одну и ту же точку не попадает.

Из теоремы 1 сразу не видно, как доказать что ломаные дракона не проходят дважды по одному и тому же отрезку — наоборот, чем более длинные и запутанные ломаные или кривые рисуешь, тем более удивительно, как удачно их «выступы» и «впадины» подходят друг к другу (см. кривую дракона на с.11).

Однако нетрудно это доказать ¹, используя другую теорему об «удвоении» ломаных дракона, которая, кстати, дает еще один способ рисовать длинные ломаные.

Второй способ.

На рисунке 8 вершины ломаных дракона соединены пунктирными отрезками через одну. Мы видим, что пунктирные от-

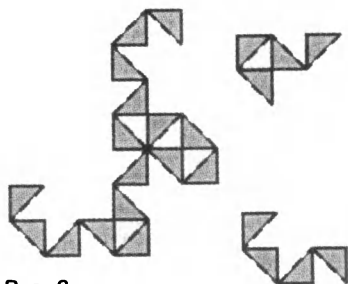


Рис. 8

¹ См. задачу 9 в конце статьи.

резки снова составляют ломаные дракона. Оказывается, это тоже общая закономерность.

Чтобы точно ее сформулировать, заметим еще, что каждый пунктирный отрезок является гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого – звенья исходной ломаной (на рисунке треугольники слегка закрашены), причем каждые два соседних таких треугольника получаются друг из друга поворотом на 90° вокруг их общей вершины; другими словами, если идти вдоль пунктирной ломаной дракона, то эти треугольники будут встречаться поочередно то справа, то слева.

Теорема 2. Если на каждом звене ломаной дракона ранга n , как на гипотенузе, построить прямоугольный равнобедренный треугольник, причем так, чтобы для двух соседних звеньев эти треугольники получались один из другого поворотом на 90° относительно общей вершины, то катеты построенных треугольников составляют ломаную дракона ранга $n + 1$. И наоборот, каждую ломаную ранга $n + 1$ можно получить этим способом из некоторой ломаной ранга n .

В самом деле, проследим за **последним** складыванием полоски пополам. Для удобства мы будем ссылаться на условный рисунок 9. Мы хотим сложить полоску пополам $n + 1$ раз. Сложим ее сначала n раз и посмотрим на нее в профиль (пунктир на рис. 9). Затем сложим ее еще раз пополам и развернем этот последний сгиб на 90° (сплошная линия на том же рисунке ²). Теперь бумажка идет от сгибов A к сгибам B и обратно не по гипотенузе, а по катетам равнобедренного прямоугольного треугольника ABC . Развернем теперь все остальные сгибы до 90° (на рисунке 10 показано, как разворачивается отдельный сгиб). Тогда катеты прямоугольных треугольников образуют ломаную дракона ранга $n + 1$, а гипотенузы – ранга n .

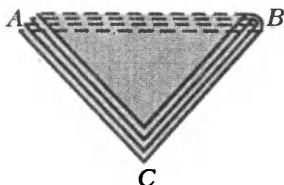


Рис. 9

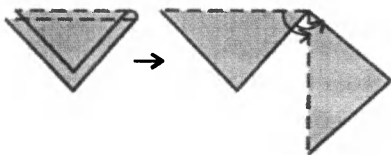


Рис. 10

² На нашем рисунке сплошная линия в $\sqrt{2}$ раз длиннее пунктирной, но это не имеет значения, поскольку нас интересует форма ломаной, а не ее размеры.

Пользуясь этими соображениями, легко доказать оба утверждения теоремы 2. Вы можете попробовать дать другое доказательство: вывести теорему 2 из теоремы 1.

С помощью теоремы 2 из каждой ломаной дракона ранга n можно получить две разные ломаные ранга $n + 1$: все зависит от того, по какую сторону от первого звена достроить треугольник.

Обратите внимание на то, что когда мы переходим от ломаной ранга n к ломаной ранга $n + 1$ по теореме 1, то ломаная получается вдвое длиннее, а длина каждого звена не меняется; если же мы пользуемся для «удвоения» теоремой 2, то длина ломаной увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а длина звена уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Потренируйтесь теперь в рисовании ломаных дракона с помощью теоремы 2.

Слова

Свойство, о котором идет речь в теореме 2, можно объяснить совсем просто, если посмотреть на ломаные дракона (или, если угодно, на способы складывания бумажки) несколько с иной точки зрения.

Пусть по ломаной дракона ползет черепаха (рис. 11). Каждый раз, когда она доползает до вершины, ей приходится поворачивать на 90° налево или направо. С точки зрения черепахи, ее путь будет определяться последовательностью поворотов. Например, для ломаной рисунка 3, a (начало в черной точке) эта последовательность будет выглядеть так: направо, направо, направо.

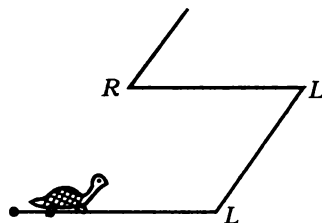


Рис. 11

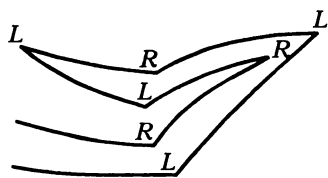
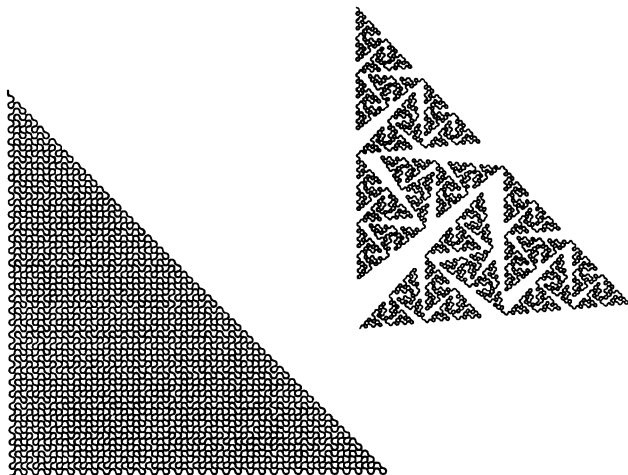


Рис. 12

Будем поворот направо обозначать буквой R , поворот налево – буквой L ³. Тогда вся ломаная запишется таким «словом»:

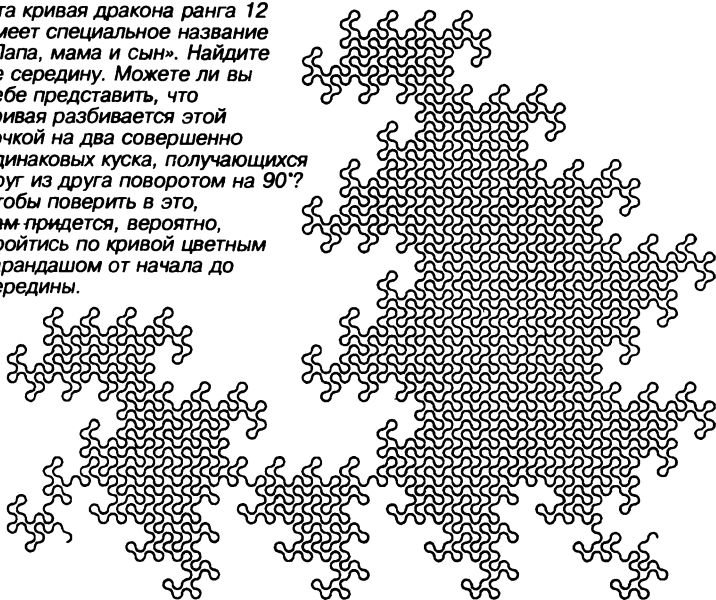
LLR

³ Мы выбрали первые буквы английских слов right (правый) и left (левый), потому что русские буквы П и Л слишком похожи друг на друга (кстати, немецкие rechts и links начинаются с тех же букв).



Эта кривая получается, если, начиная с отрезка, повторять процесс «удвоения» 12 раз, причем чередовать повороты по и против часовой стрелки. Чтобы лучше показать, как идет эта кривая, мы поворачиваем каждый раз не на 90° , а на 95° ; если уменьшить углы до 90° , то получится кривая дракона, которая заполняет равномерным узором равнобедренный прямоугольный треугольник.

Эта кривая дракона ранга 12 имеет специальное название «Папа, мама и сын». Найдите ее середину. Можете ли вы себе представить, что кривая разбивается этой точкой на два совершенно одинаковых куска, получающихся друг из друга поворотом на 90° ? Чтобы поверить в это, нам придется, вероятно, пройти по кривой цветным карандашом от начала до середины.



(«словом» во многих разделах математики и логики называют просто любую последовательность букв). Точно так же можно записать словом из букв L и R любую ломаную дракона.

Чтобы получить из ломаной a ломаную e (рис.3), нужно бумажку сложить еще один раз «налево» (см. рис. 3, e и 12). При этом между каждыми двумя вершинами ломаной a возникнет еще по одному повороту, причем на рисунке 12 хорошо видно, что эти новые повороты будут чередоваться; таким образом, получим

$$\begin{array}{l} L L R \\ L R L R \end{array} \rightarrow LLRLLRR,$$

т.е. слово, являющееся записью ломаной e . При еще одном сгибе налево мы получили бы ломаную, характеризующую словом

$$\begin{array}{l} L L R L L R R \\ L R L R L R L R \end{array} \rightarrow LLRLLRLLLRLLRR.$$

Начертите эту ломаную. Это – Главная ломаная дракона ранга 4. Если хотите, закруглите у нее углы, как это предложил Хейвей.

Если вы проделаете над последним полученным словом ту же операцию еще раз (снова начав последовательность чередующихся букв с L), то получите слово из 31 буквы – запись Главной ломаной дракона ранга 5, изображенной на рисунке 4.

Разумеется, последовательность чередующихся букв можно начинать не с L , а с R – при этом получатся другие ломаные.

Легко видеть, что наш способ изготовления слова для ломаной ранга $n + 1$ из слова для ломаной ранга n в точности соответствует геометрическому способу удвоения, о котором идет речь в теореме 2 (новым буквам соответствуют достраиваемые треугольники). Вообще всю «теорию» ломаных дракона можно было бы строить не геометрически – с помощью поворотов, достраивания треугольников и т.п., а «алгебраически» – с помощью операций над словами из двух букв L и R , «записями» ломаных дракона ⁴.

⁴ Именно такой способ изложения избрали канадские математики Кнут и Дэвис, по рукописи которых «Number representations and dragon curves» (Ch.Davis, D.E.Knuth) авторы статьи впервые познакомились с кривыми дракона. Из этой рукописи заимствован и ряд рисунков длинных кривых дракона.

Читатель сможет частично проделать этот путь и познакомиться с целым рядом интересных закономерностей, которыми обладают слова-записи кривых дракона, решая нижеследующие задачи.

Задачи

1. Какой длины надо взять полоску, чтобы, сложив ее пополам 30 раз, получить расстояние между соседними сгибами равным 1 см? Больше или меньше расстояния от Земли до Луны?

2. Как изменится ломаная дракона, если полоску бумаги положить на стол другим ребром? Как изменится при этом слово, записывающее ломаную?

3. а) Сколько существует различных (не подобных друг другу) ломаных дракона ранга 4? Нарисуйте их все. Напишите соответствующие им слова из букв L и R .

б) Сколько существует различных ломаных ранга n ?

4. Допустим, что черепаха проползла по ломаной дракона и прочла слово из букв L и R . Какое слово она прочтет, если проползет по этой ломаной в обратном направлении?

5. Пусть s – некоторое слово из букв L и R . Обозначим через \bar{s} слово, которое получится из s , если переставить в нем буквы в обратном порядке и потом поменять L на R и R на L . (Например, если $s = LLR$, то $\bar{s} = LRR$)

Пусть s и t – некоторые слова из букв L и R . Будем обозначать через st слово, получающееся, если слова s и t написаны рядом. (Например, если $s = LLR$, $t = RL$, то $st = LLRRL$).

Докажите, что:

а) Для любых слов s и t

$$\overline{st} = \bar{t}\bar{s}.$$

б) Если s_{n+1} – слово, соответствующее ломаной дракона ранга $n + 1$, то

$$s_{n+1} = s_n x \bar{s}_n,$$

где s_n – некоторое слово, соответствующее ломаной дракона ранга n , а x – слово, состоящее из одной буквы.

в) Если s_n – слово, соответствующее ломаной дракона, то s_n отличается от \bar{s}_n только одной средней буквой.

г) Слово, записывающее ломаную дракона ранга n , можно и притом единственным образом построить, если задать произвольно n букв, которые должны стоять в этом слове на местах с номерами 2^k , где $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ (т.е. на первом, втором, четвертом, восьмом, ... 2^{n-1} -м местах); после этого, чтобы найти, какая буква стоит на m -м месте, нужно представить m в виде $m = 2^k(2l + 1)$, где k и l целые; если l четно, то на m -м месте стоит та же буква, что и на 2^k -м, если l нечетно – противоположная.

д) Два слова s'_n и s''_n задают одинаковые по форме (подобные) ломаные дракона в том и только в том случае, если после вычеркивания средней буквы эти слова либо совпадают, либо одно получается из другого заменой L на R и R на L . (Например, слова $LLRLLR$, $LLRRLR$, $RRLRLL$, $RLLRLL$ задают одинаковые ломаные.)

6. Пусть мы имеем ломаную дракона ранга n . Из нее можно получить две ломаные дракона ранга $n + 1$, пользуясь либо теоремой 1 (принимая за точку O тот или другой конец ломаной), либо теоремой 2 (достраивая треугольники в ту или другую сторону). Будут ли в обоих случаях получаться те же самые две ломаные дракона ранга $n + 1$ или, вообще говоря, другие? Как получать их слова из слова данной ломаной ранга n ?

7. На плоскости даны две точки A и B . Начертим квадрат с центром в середине отрезка AB , одна из сторон которого равна $2AB$ и параллельна отрезку AB . Докажите, что любая ломаная дракона с концами в точках A и B лежит внутри этого квадрата. Докажите, что для любой точки M внутри этого квадрата и любого положительного числа ϵ можно найти такую ломаную дракона с концами A и B , которая проходит от точки M на расстоянии меньше ϵ (говоря математическим языком, «объединение всех ломаных дракона с концами в точках A и B всюду плотно в этом квадрате»).

8. Пусть черепаха ползет по плоскости из точки A с постоянной скоростью – вначале по направлению AB , а затем через каждые 15 минут поворачивает на 90° . Докажите, что вернуться в A черепаха может лишь через целое число часов и лишь по направлению, перпендикулярному к AB .

9. Докажите, что ломаная дракона никогда не проходит по одному и тому же отрезку более одного раза.

10. Докажите, что если ломаную дракона повернуть вокруг ее начала O на 90° , 180° , 270° , то из полученных четырех ломаных (включая исходную) никакие две не имеют общего отрезка.

11. Рассмотрим множество ломаных λ , обладающих такими свойствами: « λ имеет $2n$ звеньев равной длины, и если ее разбить на k кусков по 2^{n-k} звеньев в каждом куске, то два соседних куска получаются один из другого поворотом вокруг общей вершины на 90° (для любого k)». Докажите, что это множество ломаных в точности совпадает со множеством ломаных дракона ранга n .

12. Введем на клетчатой бумаге систему координат, направив оси по линиям сетки и взяв за единицу масштаба сторону клетки. Будем рисовать Главную ломаную дракона так, чтобы первыми тремя ее вершинами были точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ (см. рисунок 4).

Пользуясь теоремой 1, можно продолжать эту ломаную сколько угодно раз: мы будем получать последовательно ломаные ранга 1, 2, 3, 4, 5, ... Можно представить себе, что мы нарисовали их все и получили бесконечную ломаную дракона («Главную ломаную дракона ранга ∞ »). Ее первые 2^n звеньев образуют ломаную ранга n .

а) Конец такой ломаной ранга n будет находиться в точке

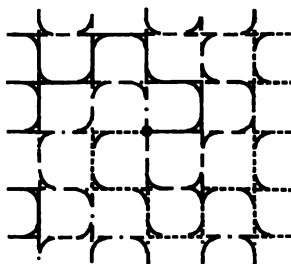
$$\left(2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}, 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{\pi n}{4} \right)$$

б) Слово, являющееся записью этой ломаной, можно быстро написать так. Сначала записываем чередующиеся буквы L и R , оставляя между ними промежутки для пропущенных букв:

$$L\ R\ L\ R\ L\ R\ L\ R\ L\ R\dots$$

а затем поступаем следующим образом. Пальцем левой руки укажем на первую букву, а правой рукой запишем ее в первый промежуток, затем левой рукой укажем на вторую букву, а правой вставим ее во второй промежуток, левой на третью... и так последовательно по всем буквам (не пропуская вновь вставленных), а правой вносим каждую указанную букву в первый свободный промежуток:

$$LLRLLRLLRRLRRLRL...$$



в) Если, как в задаче **10**, выпустить из Рис. 13
одной точки четыре главных ломаных
дракона ранга ∞ , то по каждому отрезку сетки пройдет ровно одно звено
одной из этих ломаных (рис. 13).

Рис. 13

(Это – трудная теорема; ее впервые доказал D.E.Knuth).

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В железнодорожном справочнике указано, что расстояние от Новосибирска до Душанбе равно 3895 км; если измерить расстояние между этими городами по карте (или заглянуть в справочник авиационных кассиров), то получится другое число: 2100 км. В этом, конечно, нет ничего удивительного: поезда не могут ездить почти напрямик, как летают самолеты, поэтому железнодорожники и летчики оценивают расстояния по-разному.

Жители большого города вообще редко измеряют расстояния внутри города в километрах. Скажем, если москвича спросить: «А далеко ли от Университета на Ленинских горах до Бескудникова¹?» – он скорее всего ответит: «Часа полтора», – и это будет более полезный ответ, чем «28 километров». Например, от того же Университета до Щелковской расстояние в километрах больше, а «расстояние» в минутах – меньше: туда можно доехать (с пересадкой) на метро не больше чем за час.

Еще один пример совсем другого рода. Рассмотрим три слова: *адсорбция*, *абсорбция* и *абerrация*. Каждое из этих слов содержит девять букв. Мы нарочно выбрали такие слова, точные значения которых, возможно, не вполне ясны читателям, – нас интересует сейчас только **написание** этих слов, а не их значение. Как вам кажется, какие из них больше похожи друг на друга, «ближе» друг к другу, а какие – «дальше»? Совершенно ясно, что первые два слова очень близки, а *абerrация* находится довольно далеко от них – несколько ближе к слову *абсорбция*. Можно ввести и количественную характеристику того, насколько два слова (из одинакового числа букв) близки друг к другу, – принять «расстояние» между словами равным числу мест, на которых в этих словах стоят разные буквы. Тогда «расстояние» *адсорбция* – *абсорбция* равно 1, *абсорбция* – *абerrация* – 3, *адсорбция* – *абerrация* – 4; *абстракция* и *обструкция* находятся на расстоянии 2, а *самолет* и *бегемот* – на расстоянии 6. Запишем это так: ρ (самолет, бегемот) = 6, ρ (адсорбция, абerrация) = 4, и т.п.

¹ Район на севере Москвы.

Все «расстояния», о которых мы сейчас говорили, и обычное расстояние между двумя точками на плоскости или в пространстве обладают некоторыми общими свойствами. Таких основных свойств немного, но уже достаточно для того, чтобы, приняв их за аксиомы, построить содержательную и полезную теорию. Здесь мы не собираемся излагать эту теорию, а ограничимся обсуждением некоторых первоначальных понятий и отдельных примеров.

Аксиомы и первые примеры

Пусть нам дано некоторое множество X . Мы говорим, что на нем *определено расстояние*, если каждому двум элементам a и b множества X сопоставлено некоторое неотрицательное число $\rho(a, b)$ — «расстояние от a до b », — причем выполняются следующие три условия (см. рис. 1, а, б, в):

- 1°. $\rho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.
- 2°. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ для любых двух элементов a и b из X .
- 3°. $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$ для любых трех элементов a, b и c из X .

Множество с определенным на нем расстоянием («метрикой») называется *метрическим пространством*. Сами элементы x при этом называются обычно *точками* метрического пространства.

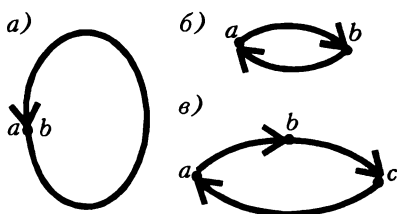
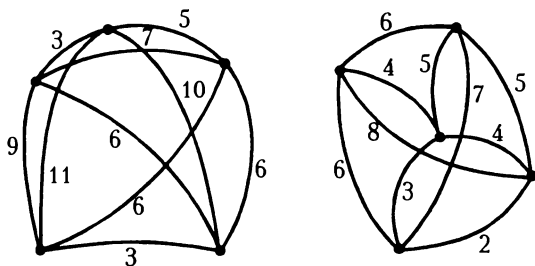


Рис. 1

Прочтем еще раз формулировки аксиом, которым должна удовлетворять функция ρ от пар точек, задающая расстояние.



На этих рисунках для каждой двух точек указано «расстояние» между ними. Выполняется ли для этого «расстояния» аксиома 3^а метрического пространства?

² Это множество обычно обозначается буквой R .

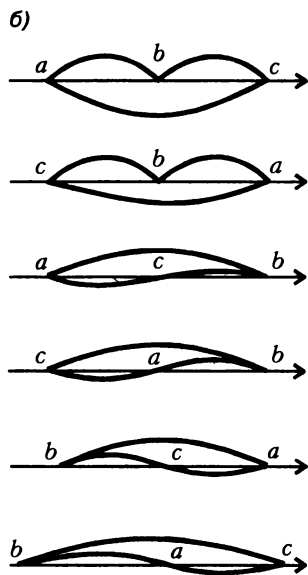
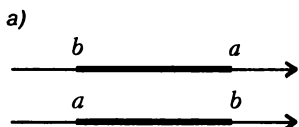


Рис. 2

1°. Расстояние от a до b равно 0 тогда и только тогда, когда a совпадает с b .

2°. Расстояние от a до b равно расстоянию от b до a («аксиома симметрии»).

3°. Расстояние от a до c не больше суммы расстояний от a до b и от b до c («аксиома треугольника»).

Начнем с самых простых примеров метрических пространств.

Пример 1. X — числовая прямая, т.е. множество всех вещественных чисел². Расстояние ρ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|. \quad (1)$$

Напомним, что $|a - b| = a - b$, если $a \geq b$, и $b - a$, если $b \geq a$, так что во всех случаях $\rho(a, b)$ равно длине отрезка числовой оси с концами a и b (рис.2, а).

Проверим, что ρ удовлетворяет всем трем требованиям 1°–3°. Очевидно, что $|a - b| = 0$ в том и только в том случае, если $a = b$, и что всегда $|a - b| = |b - a|$.

Неравенство 3° тоже почти очевидно (рис.2, б). В каждом из возможных случаев взаимного расположения точек a , b и c на прямой, включая такие, когда две из точек a , b и c совпадают, неравенство

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c| \quad (2)$$

легко доказать и формально, не ссылаясь на рисунок. Например, если $b \leq a \leq c$ (нижний рис.2, б), то

$$|a - c| = c - a,$$

$$|a - b| + |b - c| = a - b + c - b = a + c - 2b \geq a + c - 2a = c - a,$$

и поэтому верно (2).

Пример 2. X — любое множество,

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = b, \\ 1, & \text{если } a \neq b. \end{cases} \quad (3)$$

Все аксиомы $1^\circ-3^\circ$, очевидно, выполнены. Это, как говорят, «дискретное» пространство, в нем все точки стоят как бы отдельно, не слишком близко друг к другу.

Пример 3, о котором мы уже говорили выше. Предположим, что у нас есть план Москвы, на котором перечислены все остановки городского транспорта и для каждого промежутка между остановками указано, за сколько минут проходит этот промежуток автобус (соответственно, трамвай, метро, троллейбус). С помощью такого плана для любых двух остановок a и b можно найти величину $t(a, b)$ – **минимальное** время, необходимое для того, чтобы попасть из a в b (не будем в нашей «модели» учитывать время, затраченное на пересадку с одного вида транспорта на другой и на ожидание, хотя и это можно сделать). Проверим, выполняются ли для функции t свойства $1^\circ-3^\circ$; другими словами, будет ли множество всех остановок X с расстоянием t метрическим пространством. Свойство 1° , как всегда, очевидно; 3° тоже не вызывает сомнений: ясно, что можно ехать из a в c через b , поэтому **минимальное** время $t(a, c)$ заведомо не больше $t(a, b) + t(b, c)$. А вот свойство 2° , особенно теперь, когда в Москве стало много улиц с односторонним движением, может, конечно, нарушаться. Проверьте, что для функции

$$t'(a, b) = \frac{t(a, b) + t(b, a)}{2}$$

выполнены уже все свойства $1^\circ-3^\circ$.

Вот еще один пример, когда расстояние измеряется не в километрах.

Пример 3'. Пусть X – множество городов СССР, куда летают самолеты, и $\rho(a, b)$ – стоимость билета (в рублях) из города a в город b (по наиболее дешевому маршруту). Нетрудно видеть, что это – метрическое пространство.

Метрики на плоскости

Занявшись несколько экзотическими примерами метрических пространств, мы оставили в стороне самый естественный.

Пример 4. X – множество всех точек плоскости, ρ – обычное расстояние, с которым мы имеем дело в школьной геометрии, т.е. $\rho(A, B)$ – длина отрезка, соединяющего две точки A и B . Свойства 1° и 2° здесь и во всех следующих примерах совершенно очевидны, и мы не будем больше о них говорить. А свойство 3° здесь – не что иное, как утверждение «в треугольнике каждая сторона не больше суммы двух дру-

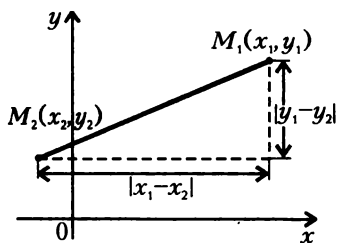


Рис. 3

гих»³. При обычном построении курса геометрии это утверждение является несложной теоремой.

Вы, вероятно, знаете, что на плоскости с прямоугольной системой координат Oxy расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками

$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ выража-

ется такой формулой (см. рис.3):

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (4)$$

Таким образом, то же самое метрическое пространство можно описать без всяких ссылок на геометрию следующим образом: X — множество всех пар (x, y) вещественных чисел⁴, расстояние между парами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) задается формулой (4). Но при этом, чтобы проверить свойство 3°, пришлось бы доказывать такое неравенство:

$$\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}.$$

Попробуйте сделать это! Удобно ввести специальные обозначения: $x_1 - x_2 = u_1$, $x_2 - x_3 = u_2$, $y_1 - y_2 = v_1$, $y_2 - y_3 = v_2$; тогда $x_1 - x_3 = u_1 + u_2$, $y_1 - y_3 = v_1 + v_2$, и последнее неравенство записывается несколько короче:

$$\sqrt{(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2} \leq \sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$$

(кстати, подобная замена обозначений сильно сократила бы и доказательство неравенства (2)). После двукратного возведения в квадрат и упрощения вы получите эквивалентное очевидное неравенство

$$u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 \geq 2u_1 u_2 v_1 v_2 \Leftrightarrow (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \geq 0.$$

Подумайте, когда это неравенство обращается в равенство? Что это означает на геометрическом языке?

³ Случай, когда три точки лежат на одной прямой, мы уже разобрали выше (пример 1).

⁴ Это множество имеет специальное обозначение \mathbf{R}^2 и называется числовой плоскостью.

В принципе все геометрические теоремы можно было бы доказывать на числовой плоскости чисто алгебраически и таким образом построить курс геометрии; но, как видите, доказательства теорем на этом пути не всегда становятся проще, — вместо «неравенства треугольника» нам пришлось доказывать довольно хитрое алгебраическое неравенство.

Мы уже говорили о том, что на одном и том же множестве можно по-разному определять расстояния. Вот два примера метрик на числовой плоскости \mathbf{R}^2 , отличных от (4).

Пример 5.

$$\rho'(M_1, M_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad (5)$$

т.е. $\rho'(M_1, M_2)$ равно сумме длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy .

Пример 6.

$$\rho''(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (6)$$

(запись $\max\{a, b\}$ означает наибольшее из чисел a, b), т.е. $\rho''(M_1, M_2)$ равно наибольшей из длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy .

Неравенство треугольника в двух последних примерах легко доказывается с помощью неравенства (2). Скажем, для ρ'' :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \\ + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |y_1 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \leq \\ \leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}, \end{aligned}$$

поэтому наибольшее из двух чисел $|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|$ не превосходит $\rho''(x_1, x_2) + \rho''(x_2, x_3)$.

Точно так же на множестве \mathbf{R}^3 всех наборов (x, y, z) из трех вещественных чисел расстояние между «точками» (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) можно задать любой из формул

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \quad (4')$$

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \quad (5')$$

или

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}. \quad (6')$$

В случае (4') мы получаем обычное трехмерное пространство, которое изучает школьная стереометрия и которое является удобной абстракцией реального пространства, в котором мы живем. Все аналогичные m -мерные пространства ($m = 2, 3, 4, \dots$) также полезны – с их помощью удобно строить всю теорию функций от m переменных, причем иногда удобнее пользоваться одной формулой для расстояния, иногда – другой.

Окрестности

Вернемся теперь в двумерное пространство – на плоскость \mathbf{R}^2 – и обсудим один наглядный способ сравнить разные расстояния (4) – (6).

Пусть точка $O = (0, 0)$ – начало координат. Найдем множество точек, находящихся от точки O на расстоянии, меньшем заданного числа r . Все знают, что это множество – внутренность круга с центром O радиуса r (рис.4, а); разумеется, речь идет о расстоянии (4), т.е. о множестве точек (x, y) , для которых $\sqrt{x^2 + y^2} < r$. А каковы будут «круги радиуса r », если расстояние определять по формуле (5) или (6)? Множество точек (x, y) , для которых $|x| + |y| < r$ – это внутренность квадрата с вершинами $(0, r)$, $(-r, 0)$, $(0, -r)$ и $(r, 0)$ (рис.4, б); а множество точек $\max\{|x|, |y|\} < r$, другими словами, множество точек, для которых одновременно $|x| < r$ и $|y| < r$ – это, очевидно, квадрат с вершинами $(-r, -r)$, $(-r, r)$, $(r, -r)$ и (r, r) (рис.4, в)

Обычно, когда речь идет о метрических пространствах, вместо слов «круг радиуса r с центром a » говорят « r - окрестность точки a ».

Определение 1. Пусть X – метрическое пространство, ρ – расстояние в X , r – положительное число. Тогда r -окрестностью точки a называется множество всех точек m из X , для которых $\rho(m, a) \leq r$. Коротко это множество можно записать так: $\{m: \rho(m, a) \leq r\}$.

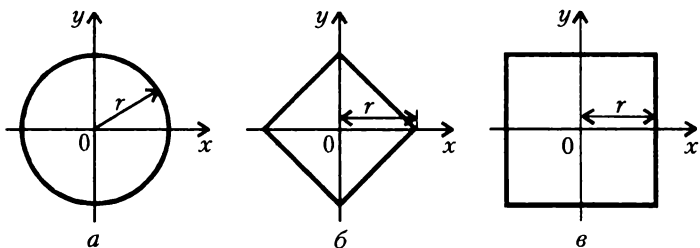


Рис. 4

Таким образом, на рисунках 4, а, б, в изображены r -окрестности точки $(0, 0)$, если расстояние на плоскости задается соответственно формулами (4), (5) и (6); нетрудно сообразить, что r -окрестность любой другой точки (x_0, y_0) в этих метрических пространствах выглядит точно так же, как окрестность точки $(0, 0)$ — просто центр круга или квадрата сдвигается в точку (x_0, y_0) .

Посмотрим, что представляют собой r -окрестности в метрических пространствах, о которых мы говорили раньше. В примере 1 r -окрестность точки a числовой оси $\{x; |x - a| \leq r\}$ — это отрезок длины $2r$, середина которого лежит в точке a (рис. 5). В примере 3' 20-окрестность Москвы — это множество городов, куда можно улететь на самолете не более чем за 20 рублей; в примере 2 r -окрестность состоит всего из одной точки, если $r < 1$, и содержит все множество X , если $r \geq 1$.

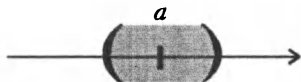


Рис. 5

Расстояние между функциями

Расстояние удобно определять не только для чисел или точек плоскости и пространства, но и для многих других математических объектов. Вот два примера из геометрии. На множестве всех *прямых, проходящих через данную точку O*, за расстояние между двумя прямыми можно принять величину меньшего из образуемых ими углов (на рисунке 6 показано, как выглядит окрестность одной из прямых). Расстояние между двумя *выпуклыми многоугольниками* M_1 и M_2 на плоскости можно определить так: для каждой вершины многоугольников M_1 и M_2 находим рас-

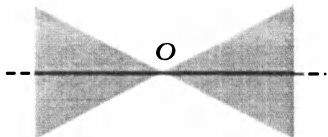


Рис. 6

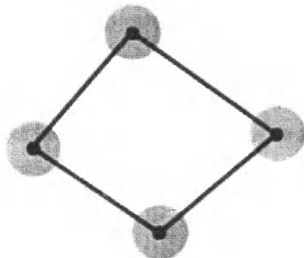


Рис. 7

стояние⁵ до ближайшей к ней вершины другого многоугольника, и из всех этих чисел берем наибольшее; таким образом, в r -окрестность данного многоугольника M_0 (рис. 7) попадают такие

⁵ Имеется в виду «обычное» расстояние (4).

многоугольники M , у которых все вершины лежат в кружках радиуса r с центрами в вершинах M_0 , причем в каждом кружке лежит хотя бы одна вершина M ; проверьте, что множество выпуклых многоугольников с таким расстоянием – метрическое пространство. Число таких примеров легко можно было бы увеличить.

Но наиболее важные применения, которым теория метрических пространств обязана своим возникновением и развитием, связаны не с геометрией, а с анализом и теорией функций.

Очень часто, чтобы исследовать данные функции или просто вычислять их значения, удобно приближенно заменить их другими, более простыми функциями, скажем, многочленами. Вы, вероятно, слышали, что при x , близком к нулю, $\sin x$ приближенно равен x (здесь $\sin x$ означает синус числа x , т.е. синус угла в x радианов). Еще более точная формула:

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. Пусть, например, x изменяется на отрезке

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Как оценить, насколько хорошо функция $f_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$ приближает функцию $f_2(x) = \sin x$, как велико

«расстояние» между этими функциями?

Одно из естественных расстояний такое: найдем при каждом x разность $f_1(x) - f_2(x)$, возьмем то $x = x_0$, где эта разность наибольшая (по модулю), и положим $\rho(f_1, f_2) = |f_1(x_0) - f_2(x_0)|$.

Для наших конкретных функций

$$\rho(f_1, f_2) = \left| \sin \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{384} \right) \right| \approx 0,0025.$$

(Можно доказать, что максимум достигается в точке $x = \frac{\pi}{4}$.)

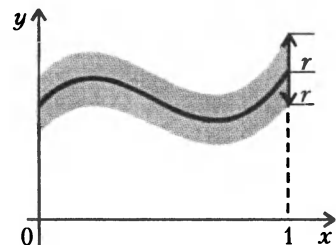


Рис. 8

Точно так же в общем случае примем за расстояние между функциями f_1, f_2 , определенными на отрезке $[a, b]$, величину

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|. \quad (7)$$

Проверьте, что аксиомы 1°–3° здесь выполнены! При этом r -окрестность данной функции (рис.8) состоит из всех таких

функций, графики которых лежат в полоске ширины $2r$ вокруг графика функции f .

Очень часто применяются и такие расстояния:

$$\rho(f_1, f_2) = s(f_1, f_2), \quad (8)$$

где $s(f_1, f_2)$ – величина площади, заключенной между графиками f_1 и f_2 (рис.9) и особенно такое:

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{S(f_1, f_2)}, \quad (9)$$

где $S(f_1, f_2)$ – величина площади,

заключенной между графиком функции $y = (f_1(x) - f_2(x))^2$ и осью Ox .

Расстояние (7) мало, когда значения функций f_1 и f_2 близки для всех значений аргумента, а расстояния (8) и (9) показывают, насколько функции f_1 и f_2 близки «в среднем» (на небольших отрезках они могут значительно отличаться друг от друга). Пусть, например, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – потенциалы двух определенных точек электрической цепи в момент времени t ; тогда мощность, выделяющаяся на участке цепи между этими точками за промежуток времени $a \leq t \leq b$, пропорциональна $S(f_1, f_2)$ (сопротивление постоянное; мощность пропорциональна $(f_1(t) - f_2(t))^2$); таким образом, мощность тем больше, чем больше расстояние (9). А если нам важно, чтобы напряжение $f_1(t) - f_2(t)$ все время не превышало какой-то величины V , то мы должны оценивать расстояние по формуле (7): нужно чтобы величина $\max_{a \leq t \leq b} |f_1(t) - f_2(t)|$ не превосходила V .

Заметим, что мы здесь не даем точных формулировок, что значит «площадь между двумя графиками», и не обсуждаем, для каких функций можно ввести расстояния (8) и (9); то же самое относится и к расстоянию (7) – ясно, что оно определено не для любых, даже не для любых ограниченных функций. Например, если одна из функций $f_1(x) = 0$ для всех x , $0 \leq x \leq 1$, а другая $f_2(x) = x$, если $0 \leq x < 1$, и $f_2(1) = 0$, то нет такой точки x , где $|f_1(x) - f_2(x)|$ достигает максимума. Всем этим тонкостям уделяется много места в учебниках математического анализа.

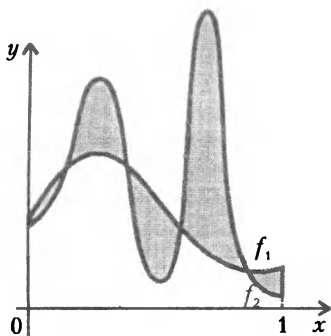


Рис. 9

Еще два определения

Для математика термин « r -окрестность» звучит не очень привычно. Гораздо чаще говорят « ε -окрестность» или « δ -окрестность»; дело в том, что греческие буквы ε и δ обычно употребляются для обозначения положительных чисел, которыми оценивают небольшие отклонения или точность приближения, и по традиции фигурируют в определении основного понятия теории метрических пространств – понятия предела.

Определение 2. Точка A называется пределом последовательности M_1, M_2, M_3, \dots , если для любого положительного числа ε существует такой номер n (зависящий от ε), что все члены последовательности, начиная с x_n , содержатся в ε -окрестности точки A . (Здесь M_1, M_2, M_3, \dots и A – точки метрического пространства X .)

Подчеркнем, что это определение годится для **любого** метрического пространства, т.е. мы сразу дали определение предела и для чисел на прямой, и для точек на плоскости, и для прямых (проходящих через одну точку) на плоскости, и для функций, определенных на отрезке.

Например, можно доказать, что функция $f(x) = \sin x$, $a \leq x \leq b$, является пределом последовательности функций f_1, f_2, f_3, \dots , где

$$f_n(x) = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$$

– независимо от того, каким расстоянием пользоваться: (7), (8) или (9) и какие числа взять в роли a и b .

Определение 3. Пусть X и Y – два метрических пространства, F – отображение множества X в Y ; x_0 – точка в X , $F(x_0) = y_0$. Тогда F называется непрерывным в точке x_0 , если для любого положительного числа ε найдется такое δ (зависящее от ε), что все точки из δ -окрестности x_0 отображаются в ε -окрестность точки y_0 .

Наглядно можно представить себе дело так: функция «рвется» в точке x_0 , если для точки x , даже очень близкой к x_0 , значение функции может оказаться далеко отстоящим от y_0 . Легко доказывается, что любая «школьная» функция представляет собой отображение своей области определения E в числовую прямую, непрерывное в каждой точке E . Вот пример непрерывного отображения множества выпуклых многоугольников (мы говорили выше о том, как превратить его в метрическое про-

странство) в числовую прямую: каждому многоугольнику ставится в соответствие его площадь.

Используя только основные свойства расстояния $1^\circ-3^\circ$, можно доказать многие теоремы, связанные с понятиями предела и непрерывной функции.

Теория метрических пространств, возникшая в начале XX века в работах Фреше и Хаусдорфа (прекрасная книга *Mengellehre* которого переведена на русский язык⁶, излагается сейчас в первых главах учебников с такими, приблизительно, названиями, как «Элементы функционального анализа», «Введение в теорию множеств и функций», «Основы современного анализа», «Топологические пространства». Разумеется, большая часть этой теории, связанная с понятием предела, содержательна только для пространств с бесконечным числом точек. Но в то же время общее понятие «расстояния» полезно и для некоторых задач про конечные множества; в частности, «расстояние между словами», о котором мы говорили в начале статьи, оказалось очень удобным инструментом в бурно развивающейся сейчас теории кодов, исправляющих ошибки. Тем, кто хочет более подробно познакомиться с теорией метрических пространств, рекомендуем прочитать книжку Ю.А.Шрейдера⁷ «Что такое расстояние».

Упражнения

1. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D метрического пространства $\rho(A, C) + \rho(B, D) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C) + \rho(C, D) + \rho(D, A)$.

2. Докажите, что для любых n точек A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 3$) $\rho(A_1, A_2) + \rho(A_2, A_3) + \dots + \rho(A_{n-1}, A_n) \geq \rho(A_1, A_n)$.

3. Доктор Шарадек, знающий хорошо стратегию, интересовался последней войной и в 1940 году познакомился с картой французского театра военных действий. Отсюда, вероятно, и возникла следующая задача. Расстояние (по воздуху, как и все расстояния в этой задаче) из Шалона до Витри равно 30 км, из Витри до Шомона 80 км, из Шомона до Сэн-Кантэна 236 км, из Сэн-Кантэна до Ремса 86 км, из Ремса до Шалона 40 км. Вычислите в этом замкнутом многоугольни-

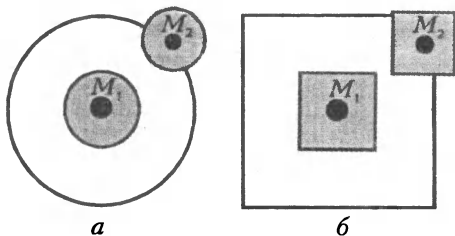


Рис. 10

⁶ Хаусдорф. *Теория множеств*. – ОНТИ, 1934.

⁷ Ю.А.Шрейдер. *Что такое расстояние*. – М.: Физматгиз, 1963.

ке расстояние от Ремса до Шомона. Без карты это умеет делать только доктор Шарадек⁸.

4. а) Докажите, что если $\rho(M_1, M_2) = r$ и $r_1 + r_2 < r$, то r_1 -окрестность точки M_1 не имеет общих точек с r_2 -окрестностью точки M_2 (рисунок 10 иллюстрирует этот факт для расстояний (4) и (6) на плоскости).

б) Докажите, что если $\rho(M_1, M_2) = r$ и $r_1 - r > r_2$, то r_2 -окрестность точки M_2 целиком содержится в r_1 -окрестности точки M_1 .

5. Множество E точек метрического пространства X называется ε -сетью, если ε -окрестности точек множества E (все вместе) целиком покрывают множество X ; другими словами, если для каждой точки x из X найдется хотя бы одна точка множества E , отстоящая от x не более чем на ε . (Здесь ε – некоторое положительное число.)

Например, множество черных точек на рисунке 11, а является $\frac{1}{10}$ -сетью для отрезка числовой оси $0 \leq x \leq 1$ с обычным расстоянием (2). Разумеется, оно является также ε -сетью при любом $\varepsilon > \frac{1}{10}$. На рисунке 11, б множество черных точек является $\frac{1}{10}$ -сетью для квадрата

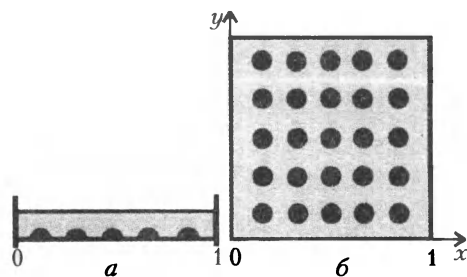


Рис. 11

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ на плоскости Oxy с расстоянием (6). Для каких ε это же множество является ε -сетью в смысле расстояний (4) и (5) на том же квадрате?

6. Метрическое пространство X называется ограниченным, если существует такое число c , что расстояние меж-

ду любыми двумя точками X не превосходит c .

Докажите, что если при каком-нибудь ε пространство имеет конечную ε -сеть, то оно ограничено.

7. Пусть $N(\varepsilon)$ – наименьшее число точек в ε -сети пространства X , $M(\varepsilon)$ – наибольшее число точек в X , расстояния между любыми двумя из которых не меньше ε .

Докажите, что $M(2\varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq M(\varepsilon)$.

8. Пусть C – множество функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и принимающих значения на том же отрезке, графики которых – ломаные линии. Будем определять расстояние в C по формуле (7).

Докажите, что можно выбрать бесконечное количество функций из C , все попарные расстояния между которыми равны единице. Выведите отсюда, что при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ в C нельзя выбрать конечную ε -сеть.

⁸ Г.Штейнгауз. *Сто задач*. – М.: Физматгиз, 1959 (задача №100).

9. Может ли в некотором метрическом пространстве быть так, что 3-окрестность точки A целиком содержится в 2-окрестности другой точки B и не заполняет ее целиком? Каков будет ответ, если заменить 3 и 2 другими числами?

10. Докажите, что среди n -значных чисел из двух цифр 1 и 2 нельзя выбрать более чем $\frac{2^n}{n+1}$ чисел так, чтобы любые два из них отличались друг от друга по крайней мере в трех разрядах.

11. С помощью задачи 4 а) докажите, что две разные точки A и B не могут быть пределами одной и той же последовательности.

12. Постройте пример последовательности функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, которая стремится к пределу f_0 , если пользоваться расстоянием (8), и не имеет f_0 пределом, если пользоваться расстоянием (7).

13. Пусть ρ_1 и ρ_2 – два расстояния на некотором множестве X – обладают тем свойством, что $\rho_1(A, B) \leq k\rho_2(A, B)$ для любых двух точек A и B , где k – некоторое положительное число (одно и то же для всех A и B).

Докажите, что если P является пределом последовательности M_1, M_2, M_3, \dots в смысле расстояния ρ_2 , то P будет пределом этой последовательности в смысле расстояния ρ_1 . Пользуясь этим, докажите, что на плоскости утверждение «пределом последовательности M_1, M_2, M_3, \dots является точка P » имеет один и тот же смысл, независимо от того, каким из расстояний (4), (5), (6) мы пользуемся.

14. а). Придумайте расстояние ρ на множестве всех прямых на плоскости, для которого выполнялось бы следующее условие: если последовательности точек A_1, A_2, A_3, \dots и B_1, B_2, B_3, \dots имеют пределами две различные точки A и B , то последовательность прямых $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ имеет (в смысле расстояния ρ) пределом прямую AB .

б) Докажите, что подобное расстояние ρ нельзя задать так, чтобы расстояние между любыми двумя пересекающимися прямыми зависело только от угла между ними.

РАССТАНОВКА КУБИКОВ

В этой статье мы расскажем решение одной из задач, предлагавшихся на Всесоюзной математической олимпиаде 1971 года в Риге. Она формулировалась так.

Задача. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики?

а) Укажите ответ для маленьких значений n : для $n = 2, 3, 4$.

б) Попробуйте найти ответ для $n = 10$.

в) Решите общую задачу. Если вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г) Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так. Рассмотрим всевозможные наборы (x_1, x_2, x_3) , где каждая из букв x_1, x_2, x_3 принимает одно из n значений $1, 2, \dots, n$. Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашелся такой, который отличался бы от него только в одном месте (значением только одной из координат x_1, x_2, x_3 ? Попробуйте найти оценки для числа наборов в более общей задаче, когда рассматриваются наборы не из трех, а из четырех и большего количества букв.

Формулировка с ладьями

Чтобы не путаться в словах «куб», «кубик» и «выбранный кубик», удобно переформулировать задачу в других терминах. Весь куб $n \times n \times n$ мы назовем «пространственной шахматной доской», каждый из кубиков $1 \times 1 \times 1$ — «клеткой», каждый выбранный кубик — «клеткой, занятой ладьей». Будем считать, что ладья, стоящая в какой-то клетке x , держит под ударом все клетки, расположенные вдоль трех прямых, параллельных ребрам куба и проходящих через центр клетки x (в

том числе будем считать, что ладья бьет и саму эту клетку x (рис.1)). Тогда вопрос, поставленный в условии, можно сформулировать так: какое наименьшее число ладей можно расставить на доске $n \times n \times n$, чтобы они били всю доску (т.е. все клетки без исключения)?

Упражнение 1. Решите аналогичную задачу для «плоской» шахматной доски $n \times n$. (Ответ: n . Заметьте, что если на доске $n \times n$ стоит меньше чем n ладей, то найдутся горизонталь и вертикаль, свободные от ладей).

Первоначальные грубые оценки

Обозначим через A_n наименьшее количество ладей, которые могут побить всю доску $n \times n \times n$.

Поскольку на доске $n \times n \times n$ каждая ладья бьет $3n - 2$ клетки, а всего клеток n^3 , то, чтобы побить всю доску, нужно расставить по крайней мере $\frac{n^3}{3n - 2}$ ладей. Другими словами,

$$A_n \geq \frac{n^3}{3n - 2}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$A_2 \geq 2, \quad A_3 \geq 4, \quad A_4 \geq 7, \quad A_5 \geq 10.$$

Легко придумать пример расстановки n^2 ладей, бьющих всю доску (их можно расставить в одном горизонтальном «слое»).

Это дает такую грубую оценку:

$$A_n \leq n^2. \quad (2)$$

Упражнение 2. Докажите, что

$$A_n \leq \frac{3n^2}{4}, \quad (3)$$

воспользовавшись следующим соображением: если расставить n_1 ладей вдоль ребра n_1 доски $n_1 \times n_2 \times n_3$, то после этого останется решить задачу для доски $n_1 \times (n_2 - 1) \times (n_3 - 1)$.

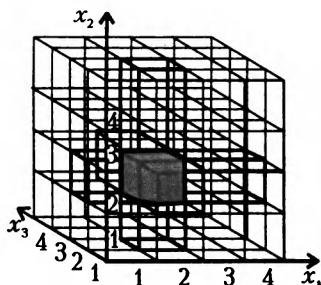


Рис. 1. Ладья, стоящая на поле 222 (выделенный кубик), бьет десять полей: кроме самого поля 222, еще 122, 322, 422 (в направлении x_1 в «ширину»), 212, 232 и 242 (в направлении x_2 в «высоту»), 221, 223 и 224 (в направлении в x_3 «глубину»)

Запись расстановок «в плане»

При $n = 2$, очевидно, двух ладей достаточно, чтобы держать под ударом все восемь клеток (рис.2), т.е. $A_2 = 2$. Несколько труднее исследовать случай $n = 3$. Пример нужной расстановки пяти ладей показан на рисунке 3.

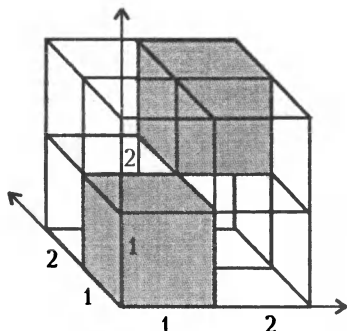


Рис.2. Ладьи 111 и 222 бьют всю доску $2 \times 2 \times 2$

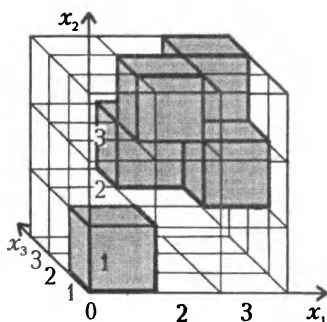


Рис.3. Ладьи 111, 223, 232, 322 и 333

В этом рисунке уже довольно трудно разобратся. С увеличением n дело еще ухудшится. Поэтому необходимо придумать более удобный способ описания расстановок ладей. Можно было бы, конечно, просто перечислять все «координаты» ладей, как это сделано в подписях под рисунками, но мы предложим более наглядный способ записи.

Будем называть *слоем* множество клеток, центры которых лежат в плоскости, параллельной одной из граней доски, и *линией* – множество клеток, центры которых лежат на одной прямой, параллельной ребру; слой состоит из n^2 клеток, линия – из n клеток. Нарисуем проекцию доски на одну из граней, скажем, на плоскость Ox_1x_2 (вид спереди) и на каждом поле полученной доски $n \times n$ напишем номер слоя, в котором встречается ладья, проектирующаяся на это поле. Тогда расстановка ладей, изображенная на рисунке 3, запишется так, как показано на рисунке 4 (ситуации, когда в одной линии стоит больше одной ладьи, у нас не будут встречаться, поэтому на каждом поле

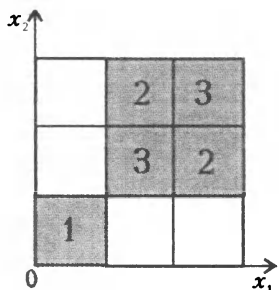


Рис. 4

доски $n \times n$ будет записываться не более чем одно число). Заметьте, что на рисунке 4 для каждого пустого поля в строке и столбце, на пересечении которых оно стоит, встречаются все номера: 1, 2 и 3. Это и означает, что каждое поле доски $3 \times 3 \times 3$, которое не бьется в направлении x_3 , бьется или в направлении x_1 , или в направлении x_2 .

Итак, мы убедились, что $A_3 \leq 5$. То, что $A_3 \geq 4$, было уже доказано (см. (1)). Возникает вопрос: чему же равно A_3 : 4 или 5? Мы предоставляем читателям возможность разобраться в случаях $n = 3$, $n = 4$ и т.д., а затем перейдем сразу к общему случаю.

Упражнение 3. а) Докажите, что 4 ладьи нельзя расставить так, чтобы они били всю доску $3 \times 3 \times 3$; б) укажите пример расстановки 8 ладей, которые бьют всю доску $4 \times 4 \times 4$; в) докажите, что $A_4 = 8$.

Общий случай. Формулировка результата

В нашей задаче едва ли не самое трудное – выдвинуть правильную гипотезу: чему равно A_n . Зная ответ, уже значительно легче и построить пример (т.е. оценить A_n сверху), и доказать, что меньшим числом ладей обойтись нельзя. А ответ таков:

$$A_n = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \text{если } n \text{ четно} \\ \frac{n^2 + 1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases}$$

В частности, $A_4 = 8$, $A_5 = 13$, ..., $A_{10} = 50$.

Примеры «оптимальной» расстановки A_n ладей ясны из рисунков 5, а (n четно) и 5, б (n нечетно). Легко проверить, что

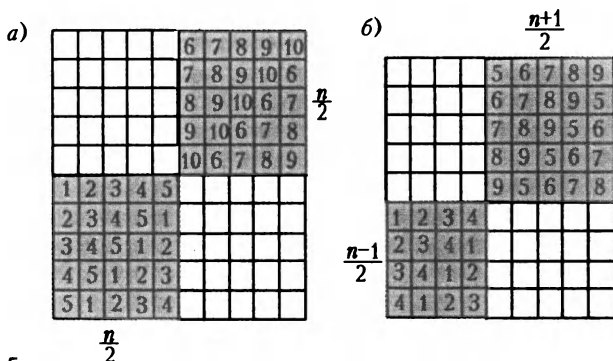


Рис. 5

все поля, которые не бьются в направлении x_3 , бьются либо в направлении x_1 , либо в направлении x_2 : в каждом «кресте» — строке и столбце, на пересечении которых стоит пустое поле — встречаются все номера от 1 до n .

Осталось доказать, что в меньшем количестве ладьи не могут побить всю доску.

Первое доказательство

Пусть M ладей расставлены так, что они бьют все клетки доски. Выберем из всех слоев тот, в котором количество ладей минимально (если таких слоев несколько, возьмем любой из них). Можно

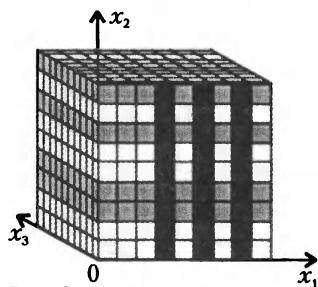


Рис. 6

считать, что он расположен параллельно плоскости Ox_1x_2 . Обозначим этот слой через S , а количество ладей в нем — через m . Пусть эти m ладей бьют m_1 рядов в направлении x_1 и m_2 рядов в направлении x_2 (можно считать, что $m_1 \geq m_2$; разумеется, $m \geq m_1$ и $m \geq m_2$). Тогда в слое S эти ладьи оставляют непобитыми $(n - m_1)(n - m_2)$ клеток, которые должны биться в направлении x_3 . (На рисунке 6 слой S — передний, клетки, занятые ладьями, — черные, $n = 9$, $m = m_1 = 4$, $m_2 = 3$).

Рассмотрим теперь все n «горизонтальных» слоев — слоев, параллельных плоскости Ox_1x_3 . В тех $n - m_1$ из них, которые не содержат ладей слоя S , как мы убедились, должно быть не менее $(n - m_1)(n - m_2)$ ладей. В каждом из остальных m_1 слоев (серых на рисунке 6) — не менее m ладей (по выбору m). Поэтому

$$M \geq (n - m_1)(n - m_2) + m m_1 \geq (n - m_1)^2 + m_1^2.$$

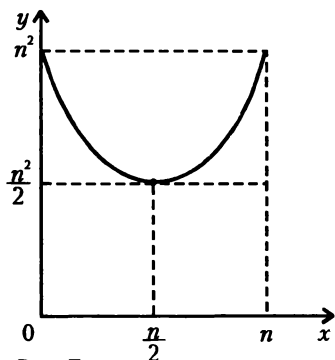


Рис. 7

Но минимальное значение правой части при целом m_1 , как легко доказать, как раз равно $\frac{n^2}{2}$ при четном n и $\frac{n^2 + 1}{2}$ при нечетном n (график функции $f(x) = (n - x)^2 + x^2$ изображен на рисунке 7).

Второе доказательство

Лемма. Пусть в таблице $n \times n$ стоят целые неотрицательные числа так, что если в каком-то поле стоит 0, то сумма всех чисел строки и столбца, на пересечении которых стоит это поле, не меньше n . Тогда сумма всех чисел таблицы не меньше $\frac{n^2}{2}$ (и следовательно, если все числа в таблице целые, то при нечетном n эта сумма не меньше $\frac{n^2 + 1}{2}$).

Из леммы нужная оценка для A_n получается легко: достаточно спроектировать доску на одну из граней и написать в каждом поле полученной таблицы $n \times n$, сколько ладей в нее спроектировалось. Ясно, что условие леммы для полученной таблицы будет выполнено.

Итак, основная задача, о которой идет речь в пунктах а), б) и в) условия, решена.

Замечания по поводу обобщений

Что же касается более общей задачи, сформулированной в пункте г), — аналогичной задачи не для «трехмерной», а для « k -мерной» доски ($k \geq 4$), то здесь окончательный результат не известен. Для минимального числа A_n^k ладей, бьющих всю доску $n \times n \times \dots \times n$ (мы сохраняем шахматную терминологию, но напомним, что теперь клетка x — это набор из k чисел (x_1, x_2, \dots, x_k) , где каждое k принимает значение от 1 до n), легко получить оценки, аналогичные (1), (2):

$$A_n^k \leq n^{k-1}, \quad A_n^k \geq \frac{n^k}{k(n-1)+1}.$$

Упражнение 4. Докажите эти неравенства. Постарайтесь улучшить оценку n^{k-1} , используя те же соображения, что и в упражнении 2.

Поскольку $A_n^2 = n$ и A_n^3 равно $\frac{n^2}{2}$ или $\frac{n^2+1}{2}$, напрашивается гипотеза, что A_n^k близко к $\frac{n^{k-1}}{k-1}$. Эту гипотезу, наряду с другими, обсуждали участники олимпиады и члены жюри не только во время олимпиады, но и после нее. Один из наиболее интересных результатов нам сообщили выпускник физико-математической школы при Ленинградском университете *Д. Григорьев* и наш читатель *Б. Гинзбург*: им (независимо) удалось доказать, что если M ладей бьют всю доску и при этом *никакие две не бьют друг друга*, то $M \geq \frac{n^{k-1}}{k-1}$ (доказательство мы помещаем в конце статьи). По-видимому, этот результат верен и без дополнительно-го предположения, выделенного курсивом, т.е. верно неравенство

$A_n^k \geq \frac{n^{k-1}}{k-1}$, причем, как показывают примеры, при $n > k$ эта оценка довольно близка к точной (или даже в точности совпадает с ней).

Однако оценка $\frac{n^{k-1}}{k-1}$ заведомо не является «очень точной» при всех n и k . Например, если $n = 2$, то $\frac{n^{k-1}}{k-1} = \frac{2^{k-1}}{k-1}$, и «грубая» оценка $\frac{n^k}{k(n-1)+1} = \frac{2^k}{k+1}$ оказывается лучше (при $k > 3$); при больших k число $\frac{2^k}{k+1}$ примерно в два раза больше, чем $\frac{2}{k-1}$.

Упражнение 5. Найдите A_2^4 , A_3^4 , A_2^5 .

Несколько слов про задачи о кодах

Одна задача, очень близкая к нашей по формулировке, является значительно более исследованной — прежде всего, потому, что она важна для приложений. В «шахматных терминах» она звучит так: какое наибольшее число ладей можно расставить на k -мерной доске $n \times n \times \dots \times n$, чтобы они не били друг друга? (Другой вариант: чтобы никакое поле не билось двумя ладьями?) Иначе говоря: какое множество Y наборов $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ можно составить так, чтобы а) каждые два набора в Y отличались более чем в одной координате, или б) каков бы ни был набор $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, в множестве Y найдется не больше одного набора y , отличающегося от x лишь в одной координате? Сформулированные задачи прямо относятся к теории информации, точнее, к ее разделу — теории кодов, исправляющих ошибки. Эта теория занимается задачами такого типа: составить множество Y «слов» (y_1, y_2, \dots, y_k) такое, что если при передаче одного из этих слов (скажем, по телеграфу или по каналу связи в вычислительной машине) вкралась ошибка в какой-то «букве», то эту ошибку можно было бы обнаружить, а еще лучше — исправить, т.е. восстановить переданное «слово». Поэтому множество Y , удовлетворяющее условию а), называется «кодом, обнаруживающим одиночные ошибки», а удовлетворяющее условию б) — «кодом, исправляющим одиночные ошибки». Вы видите, что в математике слово «код» используется не совсем так, как в книгах про шпионов.

Упражнение 6. Пусть B_n^k — наибольшее число ладей, которые можно расставить на k -мерной доске $n \times n \times \dots \times n$ так, чтобы они не били друг друга. а) Какое число больше: B_n^k или A_n^k ? б) Найдите B_n^2 , B_n^3 , B_2^4 .

Теория кодов представляет собой, пожалуй, самый яркий пример применения современной алгебры в далекой от нее, на

первый взгляд, области, прямо связанной с техническими приложениями. Ей посвящено много научных работ и несколько толстых книг¹, она быстро развивается и заслуживает специального знакомства.

Приложение

Теорема. Пусть X – множество всех наборов $x = (x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$, где каждая из $k+1$ координат x принимает n значений: $1, 2, \dots, n$; Y – подмножество X такое, что (1) любые два набора из Y отличаются хотя бы двумя координатами и (2) для каждого x из X существует набор y из Y , отличающийся от x не более чем в одной координате. Тогда в Y не более n^k/k элементов.

Доказательство. Пусть $\alpha(x) = 1$, если x принадлежит Y , и $\alpha(x) = 0$, если нет. Положим

$$\beta(x) = \beta(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq x_{k+1} \leq n} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1});$$

$$\gamma_i(x) = \gamma_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq x_i \leq n} \beta(x_1, \dots, x_k); \text{ где } i = 1, 2, \dots, k.$$

(«Укороченные» наборы из k и $(k-1)$ координат мы будем обозначать той же буквой x , помня, что у аргументов β всегда выброшено x_{k+1} , а у γ_i – и x_{k+1} , и x_i .) По условию (1) $\beta(x) \leq 1$ для любого x . По условию (2), если $\beta(x) = 0$ для некоторого x , то $\sum_{1 \leq i \leq k} \gamma_i(x) \geq n$ для этого x . Поэтому для всех x без исключения

$$\sum_i \gamma_i(x)(1 - \beta(x)) \geq n(1 - \beta(x)).$$

Просуммируем все такие неравенства, соответствующие n^k различным наборам (x_1, x_2, \dots, x_k) . Это суммирование обозначим буквой Σ' , а суммирование по всем координатам, кроме x_i , – через Σ'_i . Пусть общее число элементов Y равно M . Тогда, поскольку $\Sigma'_i \beta(x) = M$ и $\Sigma'_i \gamma_i(x) = M$ для каждого i , получим

$$\sum_i (nM - \Sigma'_i \gamma_i^2(x)) \geq n^{k+1} - nM.$$

Поскольку сумма квадратов N вещественных чисел всегда не меньше квадрата их суммы, деленной на N , левая часть не больше

$$\sum_i (nM - \Sigma'_i \gamma_i^2(x)) \leq \sum_i \left(nM - \frac{(\Sigma'_i \gamma_i(x))^2}{n^{k-1}} \right) = knM - \frac{kM^2}{n^{k-1}}.$$

Таким образом, верно неравенство $knM - \frac{kM^2}{n^{k-1}} \geq n^{k+1} - nM$, откуда $M \leq n^k/k$.

¹ У. Питерсон. Коды, направляющие ошибки, «Мир», 1964; Э. Берлекэмп. Алгебраическая теория кодирования, «Мир», 1971.

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Все знают, что любое целое положительное число можно разложить в произведение простых множителей; так, например,

$$400 = 2^4 \cdot 5^2, 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13, 290981 = 43 \cdot 67 \cdot 101.$$

Почему такое разложение единственно? Более простой факт: если произведение mn делится на 43, то хотя бы одно из чисел m и n должно делиться на 43. Как это доказать?

Эти факты считаются очевидными. Между тем доказать их не так просто. Это мы сделаем в конце статьи, а начнем с самых простых утверждений, относящихся к делимости целых чисел, и расскажем о том, как найти наибольший общий делитель двух чисел, не раскладывая их на простые множители.

Всюду латинскими буквами (a, b, c, d и т.д.) мы обозначаем целые числа.

Делимость суммы, разности и произведения

Мы говорим, что целое число a делится на целое число b , если существует такое целое число k , что $a = kb$. В таком случае число b называется *делителем* числа a .

Сразу выведем два простых утверждения:

1°. Если числа a и b делятся на c , то и их сумма $a + b$, и их разность $a - b$ делятся на c .

2°. Если a делится на c , а b делится на d , то их произведение ab делится на cd .

Докажем 1°. Поскольку a делится на c , то $a = kc$, где k — некоторое целое число. Точно так же $b = md$, где m — целое число. Поэтому $a + b = (k + m)c$, $a - b = (k - m)d$, откуда следует, что каждое из чисел $a + b$ и $a - b$ делится на c .

Докажем 2°. Пусть $a = kc$, $b = md$. Тогда $ab = (km)cd$, откуда и следует утверждение 2°.

Задача 1. Докажите, что если a делится на b , а b делится на c , то a делится на c .

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером.

Задача 2. Какие из следующих утверждений верны, а какие нет:

а) если одно слагаемое делится на 6, а другое не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

б) если каждое из двух слагаемых не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

в) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то хотя бы одно из них не делится на 6;

г) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то каждое слагаемое не делится на 6;

д) если произведение нескольких сомножителей делится на 6, то и один из сомножителей делится на 6?

Задача 3. Про целые числа a , b и c известно, что каждое из чисел $a + b$ и $a - b$ делится на c . Следует ли отсюда, что каждое из чисел a и b делится на c ?

Задача 4. Докажите, что если $a^2 + ab + b^2$ делится на $a + b$, то $a^4 + b^4$ делится на $(a + b)^2$.

Деление с остатком

Все знают правило деления одного целого числа a на другое целое число b «столбиком». Это деление можно продолжать до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если $a = 1972$, а $b = 31$, то при делении получится частное 63 и остаток 19:

$$\begin{array}{r|l} 1972 & 31 \\ -186 & 63 \\ \hline 112 & \\ -93 & \\ \hline 19 & \end{array}$$

или $1972 = 31 \cdot 63 + 19$. Можно по этому поводу сформулировать следующее предложение (рис.1):

если a и b — целые числа, причем b больше нуля, то существует такое целое число q , что $a = bq + r$, где «остаток» r — целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq r < b$.

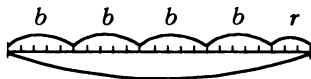


Рис. 1

a

Задача 5. В одном из подъездов 8-этажного дома на первом этаже находятся квартиры с номерами от 97 до 102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира 211? (На всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково.)

Задача 6. Было 5 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова

разрезали на 5 частей, и так сделали несколько раз. Могли ли в результате получить 1971 кусок?

Задача 7. Найдите наименьшее шестизначное число, которое делится на 3, на 7 и на 13.

Задача 8. Какой остаток дает число 98 765 432 123 456 789:

- а) при делении на 4;
- б) при делении на 8;
- в) при делении на 9?

Наибольший общий делитель (НОД)

Пусть a и b – целые числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a , и b , и выберем из них наибольшее. Этот наибольший общий делитель чисел a и b мы будем обозначать через НОД (a , b). Например, НОД (4, 12) = 4; НОД (21, 91) = 7; НОД (15, 28) = 1.

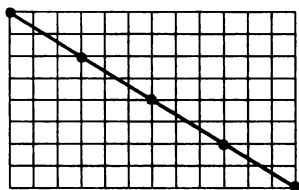
Если НОД (a , b) = 1, то числа a и b называются взаимно простыми.

Задача 9. Произведение двух чисел равно 600. Какое наибольшее значение может иметь НОД таких чисел?

Задача 10. Докажите, что если $d = \text{НОД} (a, b)$, $a = kd$, $b = ld$, то НОД (k , l) = 1.

Задача 11. Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 264 белых и 192 красных тюльпанов?

Задача 12. а) На листке клетчатой бумаги нарисован прямоугольник размером 8×12 , на его диагонали лежат 5 узлов сетки (рис.2). Пусть



имеется прямоугольник $m \times n$, стороны которого проходят по линиям сетки. Сколько узлов сетки лежит на его диагонали?

б) Сколько решений в натуральных числах x , y имеет уравнение $mx + ny = mn$, где m и n – данные натуральные числа? (Напомним, что натуральными называются целые положительные числа.)

Рис. 2

Алгоритм Евклида

Для того чтобы найти НОД двух чисел, можно, конечно, действовать так: выписать все делители каждого из чисел, выбрать общие делители, а затем взять из них наибольший. Можно поступить иначе, не отыскивая отдельно делители каждого из чисел.

Докажем следующую важную лемму.

Лемма 1. Пусть $a = bq + r$, тогда НОД (a , b) = НОД (b , r).

С этой целью покажем, что у пары чисел (a , b) множество общих делителей в точности такое же, как у пары чисел (b , r).

Отсюда, конечно, будет следовать, что и НОД у этих пар один и тот же. Итак, докажем, что каждый общий делитель чисел a и b является также делителем числа r , и наоборот, что каждый общий делитель чисел b и r является делителем числа a .

Докажем сначала первое утверждение. Пусть a и b делятся на k . Тогда bq делится на k (см. 2°) и $r = a - bq$ делится на k (см. 1°).

Перейдем ко второму утверждению. Если b и r делятся на m , то bq делится на m и $a = bq + r$ делится на m (здесь мы опять пользовались утверждениями 1° и 2°).

Доказанная лемма позволяет легко и быстро находить НОД двух чисел. Посмотрим, как это делается.

Пример. Найдём, чему равен НОД (6069, 663).

Решение. Разделим 6069 на 663 с остатком:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102.$$

Из леммы следует, что

$$\text{НОД}(6069, 663) = \text{НОД}(663, 102).$$

Ищем НОД (663, 102). Для этого делим 663 на 102:

$$663 = 102 \cdot 6 + 51.$$

Снова, применив лемму, получаем $\text{НОД}(663, 102) = \text{НОД}(102, 51)$. Но 102 делится на 51 без остатка:

$$102 = 51 \cdot 2,$$

поэтому $\text{НОД}(102, 51) = 51$, следовательно,

$$51 = \text{НОД}(102, 51) = \text{НОД}(663, 102) = \text{НОД}(6069, 663).$$

Ответ. $\text{НОД}(6069, 663) = 51$.

Метод отыскания наибольшего общего делителя, основанный на последовательном применении леммы 1, носит специальное название – *алгоритм Евклида*.

Задача 13. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 987 654 321 и 123 456 789;

б) 7 777 777 777 и 777 777.

Задача 14. От прямоугольника 324×141 см отрезают несколько квадратов со стороной 141 см, пока не останется прямоугольник, у которого одна из сторон меньше 141 см. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне, до тех пор, пока это возможно, и так далее (рис.3).

На какие квадраты будет разрезан прямоугольник? (Укажите их размеры и количество.)

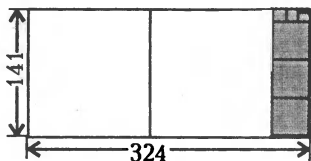


Рис. 3

b . Затем мы делим число b на r_1 и находим остаток r_2 , который меньше, чем r_1 . Далее, мы делим число r_1 на число r_2 , при этом получаем остаток r_3 , меньший, чем r_2 , и так далее, пока какой-нибудь остаток r_{n-1} не разделится на остаток r_n нацело, без остатка (т.е. $r_{n+1} = 0$).

Ясно, что указанный процесс обязательно кончится, поскольку каждый остаток меньше предыдущего, а все остатки – неотрицательные числа. Последний остаток r_n и есть НОД (a, b):

$$r_n = \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \dots$$

$$\dots = \text{НОД}(r_2, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(a, b).$$

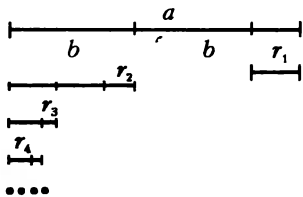


Рис. 4. Пусть a и b – два отрезка, $a > b$. Отложим b на a столько раз, сколько возможно; получим остаток r_1 . Отложим r_1 на b столько раз, сколько возможно; получим остаток r_2 . Отложим r_2 на r_1 столько возможно; получим остаток r_3 , и т.д.

Если, откладывая некоторое r_i на r_{i-1} , мы не получим остатка (т.е. $r_{i+1} = 0$), то отрезок r_i и есть наибольшая общая мера отрезков a и b . Если длины a и b – целые, то все остатки r_1, r_2, \dots также имеют целые длины, процесс откладывания оборвется и последнее r_i и есть НОД (a, b). Если процесс откладывания отрезков не обрывается, то отрезки a и b несоизмеримы (отношение a/b иррационально)

Итак, алгоритм Евклида – это простой метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Если у нас имеется два числа a и b , причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b и получаем остаток r_1 , который меньше, чем

С одной геометрической иллюстрацией алгоритма Евклида мы встретились в задаче 14. Более известный и важный геометрический вариант алгоритма Евклида – алгоритм отыскания наибольшей общей меры двух отрезков (рис. 4).

Задача 15. Найдите наибольшее число α такое, что числа $\frac{15}{28\alpha}$ и $\frac{6}{35\alpha}$ – целые. Другими словами, найдите длину отрезка α , являющегося наибольшей общей мерой отрезков длиной $\frac{15}{28}$ и $\frac{6}{35}$.

Линейное уравнение

С помощью алгоритма Евклида можно доказать одно важное свойство наибольшего общего делителя.

Лемма 2. Если $\text{НОД}(a, b) = d$, то можно найти такие целые числа x и y , что $d = ax + by$.

В самом деле, остаток r_1 при первом делении a на b записывается в виде $ax_1 + by_1$, так как $r_1 = a - bq_1$ (т.е. $x_1 = 1$, $y_1 = -q_1$). Следующий остаток r_2 при делении b на r_1 записывается в виде $ax_2 + by_2$, так как

$$\begin{aligned} r_2 = b - r_1 q_2 &= b - (ax_1 + by_1)q_2 = \\ &= a(-x_1 q_2) + b(1 - y_1 q_2) = ax_2 + by_2. \end{aligned}$$

Очевидно, такое же рассуждение применимо по отношению ко всем следующим остаткам, пока мы не придем к равенству $r_n = ax + by$, но $r_n = \text{НОД}(a, b)$. Лемма 2 доказана.

Вернемся к примеру, разобранным в предыдущем пункте, в котором мы нашли $\text{НОД}(6069, 663) = 51$. Найдем теперь такие числа x и y , что

$$51 = 6069x + 663y.$$

Наибольший общий делитель мы нашли из цепочки равенств:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102,$$

$$663 = 102 \cdot 6 + 51,$$

$$102 = 51 \cdot 2.$$

Из первого равенства

$$102 = 6069 - 663 \cdot 9.$$

Второе равенство дает нам

$$\begin{aligned} 51 &= 663 - 102 \cdot 6 = 663 - (6069 - 663 \cdot 9)6 = \\ &= -6069 \cdot 6 + 663 \cdot 55. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли числа $x = -6$ и $y = 55$ такие, что

$$6069x + 663y = 51.$$

Важным частным случаем леммы 2 является такое утверждение:

если числа a и b взаимно просты, то найдутся такие целые числа x и y , что

$$ax + by = 1.$$

Заметим, между прочим, что лемма 2 следует из этого утверждения. Например, уравнение, которое мы решали:

$$6069x + 663y = 51,$$

можно было бы сразу сократить на 51 и решать эквивалентное

уравнение

$$119x + 13y = 1.$$

Здесь числа 119 и 13 взаимно просты.

Решение $x = -6$, $y = 55$ годится для обоих уравнений.

Еще одно замечание. Мы привели способ, позволяющий находить только одно решение такого уравнения. На самом деле, если есть хотя бы одно решение, то их существует бесконечно много.

Например, числа

$$x = -6 + 13t, \quad y = 55 - 119t \quad (*)$$

(t – любое целое число) также являются решениями обоих наших уравнений. В самом деле,

$$119(-6 + 13t) + 13(55 - 119t) = 1$$

и, конечно,

$$51 \cdot 119(-6 + 13t) + 51 \cdot 13(55 - 119t) = 51,$$

т.е.

$$6069(-6 + 13t) + 663(55 - 119t) = 51.$$

Формулы (*) дают все решения этих уравнений в целых числах. Докажем это. Пусть (x, y) – какое-то решение:

$$119x + 13y = 1.$$

Вычтем из этого уравнения почленно уже известное нам равенство

$$119 \cdot (-6) + 13 \cdot 55 = 1.$$

Получим

$$119(x + 6) + 13(y - 55) = 0,$$

или

$$119(x + 6) = 13(55 - y).$$

Поскольку левая часть последнего равенства делится на 13, а числа 119 и 13 взаимно просты, то число $x + 6$ должно делиться на 13: $x + 6 = 13t$, где t – некоторое целое число. Тогда $y = 55 - 119t$. Тем самым мы по существу выяснили, как находить решения любого линейного уравнения $ax + by = c$ в целых числах. В общем случае результат таков:

Для того, чтобы уравнение $ax + by = c$ имело решения в целых числах (x, y) , необходимо и достаточно, чтобы c делилось на НОД $(a, b) = d$. Если это условие выполнено и (x_0, y_0) – одно из решений этого уравнения, то все его решения задаются формулами

$$x = x_0 + b_1 t, \quad y = y_0 - a_1 t,$$

где

$$a_1 = \frac{a}{d}, \quad b_1 = \frac{b}{d}.$$

Задача 16. Найдите такие целые числа x и y , что $85x + 204y = 17$.

Задача 17. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах:

а) $105x + 56y = 42$;

б) $104x + 65y = 43$?

Задача 18. а) Можно ли составить батарею напряжением 220 В, соединяя последовательно элементы двух типов: напряжением 6 В и 16 В, – и если можно, то сколько надо взять тех и других?

б) Тот же вопрос, если напряжение элементов 6 В и 15 В.

Задача 19. Можно ли разменять 45 рублей на рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры так, чтобы получить всего 20 купюр?

Основная теорема арифметики

До доказательства основной теоремы сделаем еще один шаг – докажем лемму.

Лемма 3. Если произведение ab делится на c , причем числа b и c взаимно просты, то a делится на c .

Действительно, поскольку у нас $\text{НОД}(b, c) = 1$, то по лемме 2 найдутся такие целые числа x и y , что $1 = bx + cy$. Умножая обе части равенства на a , получаем, что $a = abx + acy$. Так как по условию ab делится на c , то и abx , и, разумеется, acy делятся на c , а значит, и их сумма a делится на c .

Лемма 3 очень часто используется при решении задач, причем иногда совсем «незаметно». Мы, например, опирались на нее в предыдущем пункте при выводе формул, дающих все решения уравнения $119x + 13y = 1$ (там мы выделили соответствующую фразу курсивом).

Задача 20. Докажите, что если число a делится на взаимно простые числа b и c , то a делится на bc .

Задача 21. Какие из следующих утверждений верны:

а) если ab делится на 15, то хотя бы один из сомножителей делится на 15;

б) если ab делится на 17, то хотя бы один из сомножителей делится на 17;

в) если a делится на 6, а b делится на 10, то ab делится на 15;

г) если ab делится на 60, а b взаимно просто с 10, то a делится на 20?

Напомним теперь, что *натуральное число p называется простым, если оно имеет ровно два делителя: p и 1.*

Если p просто, то для любого целого числа a верно одно из двух утверждений: либо a делится на p , либо a и p взаимно

просты (потому что НОД (a, p) может равняться только p или 1).

Лемму 3 можно сформулировать в частном случае так:

если произведение ab делится на простое число p , то или число a , или число b делится на число p .

Отсюда сразу выводится основная теорема арифметики:

каждое число разлагается на простые множители и притом единственным образом.

Действительно, пусть число раскладывается на несколько множителей и хотя бы один из них не является простым числом, тогда этот множитель сам разлагается на множители; если среди его множителей снова имеется не простой множитель, он опять разлагается на множители, и так далее. Поскольку каждый множитель числа меньше самого числа, такой процесс не может продолжаться бесконечно, и мы обязательно придем к разложению числа на простые множители.

Докажем теперь, что не может быть двух различных разложений числа на простые множители. Предположим, что имеются два разложения числа a : $a = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_k$ ($r \leq k$), где p_i и q_i – простые числа. Так как левая часть равенства делится на p_1 , то и правая его часть должна делиться на p_1 , и значит, одно из чисел q_i должно делиться на p_1 . Но q_i – простое число, значит, $q_i = p_1$. Сократив равенство на общий множитель $q_i = p_1$, обратимся к множителю p_2 и установим аналогично, что он равен некоторому множителю q_i . Сократив равенство на $p_2 = q_i$, обратимся к множителю p_3 и так далее. В конце концов слева сократятся все множители и останется 1, а так как q_i – целые положительные числа, то и справа не может остаться ничего, кроме 1. Итак, числа p_i и q_i будут соответственно равны и оба разложения тождественны.

Задача 22. Разложите числа 1971, 1972 и 1973 на простые множители.

Задача 23. а) Докажите, что если m и n взаимно просты и $am = bn$, то существует такое целое k , что $a = kn$, $b = km$.

б) Докажите, что если m и n взаимно просты и $x^m = y^n$, то найдется такое целое число z , что $x = z^n$, а $y = z^m$.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРЫЖКОВ

В этой заметке мы решим задачу М190 из «Задачника Кванта» – задачу о блохе, прыгающей по двум прямым. Ее можно решать по-разному. Мы сведем эту задачу к такому вопросу: пусть задано два или несколько перемещений плоскости, оставляющих данную точку O неподвижной (это могут быть повороты или симметрии); какое преобразование плоскости получится, если последовательно выполнить данные преобразования одно за другим?

Поскольку этот вопрос интересен и сам по себе, а не только в связи с решением задачи про блоху, мы будем иногда отклоняться в сторону и предлагать упражнения, не относящиеся непосредственно к задаче M190.

Вначале напомним формулировку задачі.

На плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b . В точке A_0 , находящейся на прямой a на расстоянии меньше 1 от прямой b , сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки $B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$, руководствуясь следующими правилами (рис. 1):

1) точки A_0, A_1, A_2 лежат на прямой a , точки B_0, B_1, B_2, \dots — на прямой b ;

$$2) \quad A_0 B_0 = B_0 A_1 = A_1 B_1 = \\ = B_1 A_2 = A_2 B_2 = \dots = 1;$$

3) точка A_{n+1} не совпадает с A_n , кроме случая, когда $A_n B_n \perp a$ (и аналогично B_{n+1} совпадает с B_n только если $B_n A_{n+1} \perp b$).

(Условиями 1)–3) последовательность прыжков определяется однозначно.)

Докажите, что если угол между прямыми a и b измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, т.е. в некоторый момент она попадет в начальную точку A_0 и затем будет последовательно прохо-

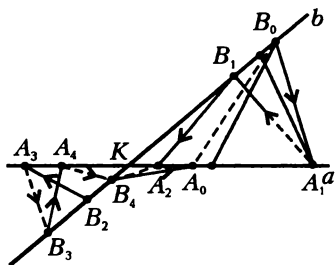


Рис. 1

дуть те же самые точки B_0, A_1, B_1, \dots , как в начале пути; а если — иррациональным числом, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

Конечно, интересно разобраться не только в том, «заиклитс» путь блохи или нет, но и вообще разобраться, как устроена последовательность точек

$$A_0, B_0, A_1, B_1, \dots, A_n, B_n, \dots, \quad (1)$$

например, научиться по номеру n определять положения точек A_n и B_n . В нашем решении будет получен ответ и на этот вопрос. В дальнейшем вместо слова «блоха» мы часто будем употреблять слово «точка».

Точка прыгает по двум прямым

Естественно начать с эксперимента: провести две прямые, вооружиться циркулем (еще удобнее — измерителем) и, взяв какую-то точку A_0 в качестве начальной, посмотреть, как выглядит «траектория» блохи. На рисунке 1 построен один такой пример: точки $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots$ последовательно соединены сплошными и пунктирными отрезками (со стрелками), указывающими путь блохи. Можно повторить такой эксперимент,

взяв другой угол между прямыми или другую начальную точку. После нескольких проб становится ясно, что точки A_n (и B_n) попадают то по одну, то по другую сторону от точки пересечения K прямых a и b . Правда, строгой периодичности тут нет: например, на рисунке 1 блоха бывает на каждом из лучей с вершиной K иногда подряд два раза, иногда — три. И, конечно, эксперимент не позволяет узнать, попадает ли блоха через несколько шагов в

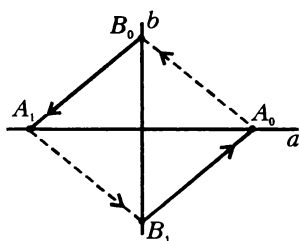


Рис. 2

начальную точку A_0 : ведь построения мы можем выполнять только приближенно, так что по чертежу мы никак не сможем уловить разницу между рациональным и иррациональным углом. (Сразу ясен лишь случай, когда угол — прямой; рис.2.)

Но зато наши рисунки могут подсказать более простую закономерность, определяющую путь блохи, чем правила 1) — 3), сформулированные в условии задачи.

Направления прыжков

Последовательные звенья ломаной – траектории блохи – это векторы единичной длины

$$\vec{A_0B_0}, \vec{B_0A_1}, \vec{A_1B_1}, \vec{B_1A_2}, \dots \quad (2)$$

(Каждый вектор показывает, каков очередной прыжок.)

Заметим, что если мы знаем вектор $\mathbf{u} = \vec{A_nB_n}$ (пусть он нарисован где-то в стороне, на плоскости), то мы сможем определить, где лежат точки A_n и B_n .

Действительно, верна такая

Лемма. Пусть a и b – пересекающиеся прямые. Для любого вектора \mathbf{u} (на плоскости) найдутся две точки A (на прямой a) и B (на прямой b) такие, что вектор \vec{AB} равен данному вектору \mathbf{u} . Точки A и B определяются однозначно.

Доказательство (рис.3). Если мы хотим, чтобы начало вектора лежало на прямой a и этот вектор равнялся \mathbf{u} , то конец его должен попасть на прямую a' , полученную параллельным переносом прямой a на вектор \mathbf{u} (на рисунке 3 прямая a' проведена пунктиром). Поэтому точка B должна лежать в точке пересечения прямой b с прямой a' . После этого легко находится и точка A .

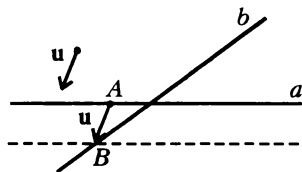


Рис. 3

Упражнение 1. Даны две точки C и D и две прямые a и b . Найдите на прямых a и b соответственно точки A и B такие, чтобы

а) середины отрезков AC и BD совпадали;

б) четырехугольник $ABCD$ был трапецией, у которой основание AB вдвое больше основания CD .

Возьмем на плоскости точку O и будем все векторы последовательности (2) откладывать от этой точки. Эти векторы, равные соответственно векторам последовательности (2), обозначим так:

$$\vec{OC_0}, \vec{OD_0}, \vec{OC_1}, \vec{OD_1}, \dots \quad (3)$$

Из леммы следует, что, зная последовательность (3), мы можем восстановить последовательность точек (1): например, зная $\vec{OC_n}$, можно найти и A_n и B_n .

На рисунке 4 изображены «направления прыжков» (3) для последовательности, изображенной на рисунке 1. Заметьте, что пунктирные векторы $\vec{OC_n}$ (отвечающие прыжкам с прямой a

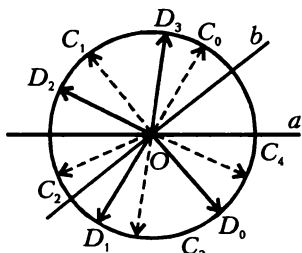


Рис. 4

на прямую b ; $n = 0, 1, 2, \dots$) образуют между собой равные углы. Оказывается, что это – общий факт, справедливый для любой последовательности прыжков. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема. Если угол между прямыми a и b равен γ , то угол между векторами \vec{OC}_n и \vec{OC}_{n+1} равен 2γ .

Это – основное соображение в задаче M190. Теорему можно доказать, пользуясь тем, что любые два соседних звена ломаной в последовательности (2) являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника, причем основание этого треугольника попеременно лежит то на прямой a , то на прямой b .

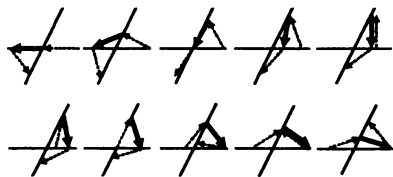


Рис. 5

Основная трудность доказательства связана с тем, что звенья ломаной могут быть по-разному расположены относительно данных прямых. Например, чтобы доказать теорему для $\gamma = 60^\circ$, пришлось бы рассмотреть 10

случаев, изображенных на рисунке 5 (остальные получаются из них симметрией относительно точки пересечения прямых a и b). Мы поступим иначе: пользуясь понятиями «преобразований», мы приведем общее доказательство, охватывающее сразу все случаи.

Точка прыгает по окружности

Сравним еще раз рисунки 1 и 4. Выделим из них фрагменты, состоящие из двух последовательных звеньев (те самые «равнобедренные треугольники», о которых шла речь выше; рис. 6, a , b и 7, a , b). Глядя на эти рисунки, легко сформули-

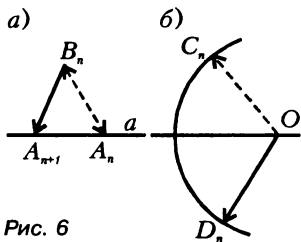


Рис. 6

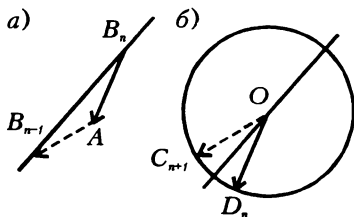


Рис. 7

ровать простое правило, по которому строится последовательность (3).

Обозначим через p и q прямые, проходящие через точку O и параллельные соответственно прямым a и b ; тогда в последовательности (3) после вектора \vec{OC}_n идет вектор \vec{OD}_n , симметричный ему относительно прямой p ; после вектора \vec{OD}_n идет вектор \vec{OC}_{n+1} , симметричный ему относительно прямой q (здесь $n = 0, 1, 2, \dots$).

Упражнения

2. Проверьте, что это правило в точности соответствует правилам 1) – 3) в условии задачи (в том числе в «вырожденных» случаях).

3. а) Докажите, что если последовательность (1) попадает в точку A_0 более двух раз, то она будет периодической и при этом некоторая точка C_n совпадает с C_0 .

б) Приведите пример, когда последовательность попадает в точку A_0 дважды: A_1 совпадает с A_0 , но B_1 уже не совпадает с B_0 .

Указание. Для точки A на прямой a существует не более двух векторов, начинающихся в A , кончающихся на прямой b и имеющих длину 1

Сформулируем теперь еще раз задачу M190 (вернее, ту задачу, к которой она свелась), но будем говорить не о преобразованиях векторов \vec{OC}_n и \vec{OD}_n , а о преобразованиях их концов – точек, лежащих на единичной окружности.

Пусть p и q – две прямые, проходящие через точку O . Обозначим через S_p преобразование симметрии относительно прямой p и через S_q преобразование симметрии относительно прямой q . (Мы можем рассматривать эти преобразования, как преобразования всей плоскости на себя; например, S_p каждой точке X плоскости ставит в соответствие точку $S_p(X)$, симметричную точке X относительно прямой p . Но в дальнейшем нам потребуется рассматривать точки на единичной окружности с

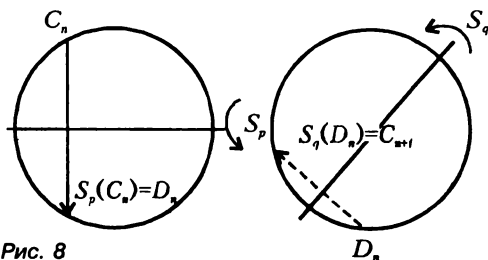


Рис. 8

центром O . Ясно, что преобразования S_p и S_q отображают единичную окружность на себя.) Пусть C_0 – некоторая точка, находящаяся на расстоянии 1 от O , и

$$C_0, D_0, C_1, D_1, C_2, D_2, \dots \quad (4)$$

– последовательность, определяемая условиями

$$D_n = S_p(C_n), C_{n+1} = S_q(D_n) \quad (5)$$

(рис.8). Мы должны доказать, что точка C_n при некотором n совпадает с C_0 в том и только в том случае, если угол γ между прямыми p и q выражается рациональным числом градусов.

Итак, задача о прыжках по двум прямым свелась к задаче о прыжках по окружности.

А теорема, которую мы должны доказать в первую очередь, утверждает, что $\cup C_n C_{n+1} = 2\gamma$, где γ – угол между p и q .

Произведение преобразований

Наше правило перехода (5) еще упростится, если мы каждые два последовательных прыжка объединим в один: в последовательности

$$C_0, C_1, C_2, \dots \quad (6)$$

каждая последующая точка получается из предыдущей по такому правилу:

$$C_{n+1} = S_q(S_p(C_n)), \quad (7)$$

т.е. надо к C_n применить S_p , а затем к полученной точке – S_q .

Определение.. Пусть K и L – два преобразования множества M на себя. *Произведением* преобразований K и L называется такое преобразование R , которое точке X из M ставит в соответствие точку $L(K(X))$. Таким образом, произведение преобразований K и L – это просто результат последовательного выполнения двух преобразований: сначала K , а затем L . Произведение R обозначается так: $R = L \circ K$, Запись K и L именно в таком порядке («справа налево») удобна тем, что для любой точки X имеет место равенство:

$$R(X) = L \circ K(X) = L(K(X)). \quad (8)$$

Мы специально уточнили, в каком порядке записываются «сомножители», потому что для умножения преобразований, вообще говоря, не выполняется равенство $L \circ K = K \circ L$ (см. ниже упражнение 4).

Точно так же определяется произведение трех и большего числа преобразований: $R = R_1 \circ R_2 \circ R_3$ означает, что нужно сделать сначала R_3 , затем R_2 , затем R_1 . Наконец, запись $R = (R_1)^n$ означает, что R – это результат n -кратного применения преобразования R_1 .

Вернемся к нашим S_p и S_q – преобразованиям симметрии относительно прямых p и q . Каково будет их произведение? (Сейчас нам удобнее считать, что S_p и S_q – преобразования всей плоскости на себя.) Ясно, что точка O останется при преобразовании $S_q \circ S_p$ на месте: она переходит в себя и при преобразовании S_p , и при преобразовании S_q . Что происходит с остальными точками?

Наглядно это преобразование можно представить себе так. При преобразовании S_p вся плоскость переворачивается вокруг прямой p и накладывается на себя «другой стороной». После второго преобразования S_q – симметрии относительно прямой q – плоскость снова переворачивается на прежнюю сторону. Ясно, что перемещением плоскости, имеющим неподвижную точку O и не меняющим «ориентации» плоскости (не переворачивающим плоскость на другую сторону), может быть только поворот вокруг точки O .

Таким образом, $R = S_q \circ S_p$ – это поворот плоскости на некоторый угол вокруг точки O . На какой именно угол? Для того чтобы ответить на этот вопрос, достаточно взять одну какую-то точку и посмотреть, что произойдет с ней. Пусть угол от прямой p до прямой q равен γ (мы будем отсчитывать углы против часовой стрелки). Возьмем точку E

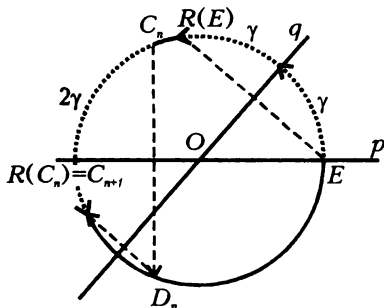


Рис. 9

на прямой p (рис.9) и найдем $R(E)$. Ясно, что $S_p(E) = E$: каждая точка прямой p при преобразовании S_p переходит в себя. А затем точка E попадет на прямую, симметричную прямой p относительно прямой q , т.е. повернется вокруг точки O на угол 2γ . Итак, если угол от p до q равен γ , то $R = S_q \circ S_p$ – поворот на угол 2γ . Отсюда следует наша основная теорема:

$$\cup C_n C_{n+1} = 2\gamma.$$

Упражнение 4. Убедитесь в том, что преобразование $S_p \circ S_q$ – поворот на угол (-2γ) , т.е. поворот на 2γ по часовой стрелке (см. отрезки

OD_i на рис.4). Таким образом, если угол γ отличен от нулевого или прямого угла, то $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$.

Запись поворотов и симметрий окружности

Вычислять произведение преобразований можно и формально. Для этого нужно ввести координаты. Поскольку нас интересуют только перемещения плоскости, имеющие данную точку O неподвижной, мы можем вместо преобразований плоскости говорить об отображениях единичной окружности с центром O на себя – о поворотах и симметриях.

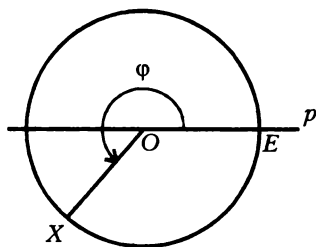


Рис. 10

Координату на окружности введем так. Выберем начало отсчета E – одну из точек пересечения прямой p с единичной окружностью. Каждой точке X окружности поставим в соответствие величину угла EOX , отсчитываемого

от OE против часовой стрелки и измеряемого в градусах (рис.10); при этом точке X соответствует множество чисел

$$\varphi, \varphi \pm 360^\circ, \varphi \pm 2 \cdot 360^\circ$$

– числам, отличающимся на целое кратное 360° , соответствует одна и та же точка окружности.

Упражнение 5. а) Преобразование S_p – симметрия относительно прямой p – задается формулой $S_p(\varphi) = -\varphi$.

б) Преобразование R^α – поворот на угол α (против часовой стрелки) – задается формулой $R^\alpha(\varphi) = \varphi + \alpha$.

в) Пусть прямая q составляет угол γ с прямой p . Преобразование S_q мы будем далее обозначать через S_γ , чтобы явно указывать, какой угол образует прямая q с «начальной» прямой p . (В частности, вместо S_p мы будем писать S_0 .) Тогда

$$S_\gamma(\varphi) = 2\gamma - \varphi.$$

Замечание. Конечно, $R^{\alpha+360^\circ n} = R^\alpha$ и $S_{\gamma+180^\circ n} = S_\gamma$ для любого целого n (угол, который составляет прямая q с прямой p , определен с точностью до прибавления любого кратного 180°). Это как раз соответствует тому, что φ определено с точностью до прибавления целого кратного 360° .

Упражнение 6. а) Докажите, что $R^\gamma \circ S_0 \circ R^{-\gamma} = S_\gamma$. Каков геометрический смысл этого равенства?

б) Докажите, что $S_{\gamma_1} \circ S_{\gamma_2} = R^{2\gamma_1-2\gamma_2}$ (отсюда, в частности, следует, что

$$S_0 \circ S_\gamma = R^{-2\gamma} \text{ и } S_\gamma \circ S_0 = R^{2\gamma}.$$

в) Проверьте, что $R^\alpha \circ R^\beta = R^{\alpha+\beta}$.

г) Докажите, что $S_\gamma \circ R^\beta = S_{\gamma-\frac{\beta}{2}}$.

д) Чему равно произведение $R^\alpha \circ S_\gamma$?

Решим для примера задачу г). Пусть точке X соответствует число φ . Тогда точке $S_\gamma \circ R^\beta(X)$ соответствует число

$$S_\gamma(R^\beta(\varphi)) - S_\gamma(\varphi + \beta) = 2\gamma - (\varphi + \beta) = 2\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) - \varphi,$$

поэтому, как мы знаем (упражнение 5, в)),

$$S_\gamma \circ R^\beta = S_{\gamma - \frac{\beta}{2}}.$$

Упражнение 7. Докажите, что

а) $(R^\alpha)^n = R^{\alpha n}$;

б) $(S_\gamma)^2 = I$, где I – тождественное преобразование (I оставляет все точки на месте).

Окончание решения задачи про блоху

Итак, мы выяснили, что в последовательности (6) точек каждая следующая получается из предыдущей поворотом на угол 2γ , где γ – угол между прямыми p и q . Поэтому C_n получается из C_0 поворотом на угол $2\gamma n$. Для того чтобы C_n и C_0 совпали, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота был целым, кратным 360° . Ясно, что если

$$2\gamma n = 360^\circ k, \text{ где } k - \text{целое,}$$

то γ измеряется рациональным числом градусов. Обратно, если $\gamma = \frac{p}{q}$ градусов, то для $n = 180^\circ q$ получим $2\gamma n = 360^\circ p$, где p – целое, поэтому $C_n = C_0$.

В заключение еще раз предлагаем вам поупражняться в «прыжках, поворотах и симметриях».

Несколько упражнений

Хотя большинство вопросов сформулировано ниже для конкретных чисел, очень советуем вам попытаться отвечать на аналогичные вопросы в общем виде (для произвольных значений параметров). Иногда это даже проще.

Упражнения

8. Пусть угол γ между прямыми a и b равен 60° , а угол отрезка $A_0\vec{B}_0$ с лучом $KA_0 - 7^\circ$. Какой угол будет составлять с этим лучом отрезок $A_{100}\vec{B}_{100}$? Отрезок $B_{100}\vec{A}_{101}$?

9. Пусть угол γ равен одному радиану и $KA_0 = 1$. Выясните, принадлежит ли точка A_{1973} лучу KA_0 или находится на другой половине прямой a .

10. Докажите, что период траектории блохи (наименьшее $n > 1$, при

котором $A_n = A_0$) зависит только от угла γ , но не зависит от того, из какой точки стартует блоха. Чему равен этот период, если $\gamma = 72^\circ$? Попробуйте проверить этот факт «экспериментально».

11. Пусть $\gamma = 37^\circ$. Сколько раз подряд точки последовательности A_0, A_1, A_2, \dots будут встречаться на луче KA_0 (укажите наибольшее и наименьшее значения)?

Если вы захотите решить в общем виде и следующие упражнения – про узоры в круге, – то вам придется, вероятно, воспользоваться той небольшой теорией, которая содержится в упражнениях 6 и 7. Под узором мы понимаем просто некоторое множество точек M , выделенное внутри единичного круга: можно считать, что круг белый, а это множество выкрашено черной краской. Мы говорим, что узор переходит сам в себя при преобразовании P , если $P(M) = M$.

Упражнения

12. Придумайте узор, который

а) переходит в себя при повороте на 180° , но не имеет ни одной оси симметрии;

б) имеет ось симметрии, но не переходит в себя ни при каком повороте (отличном от тождественного преобразования);

в) переходит в себя при повороте на 60° и не имеет оси симметрии;

г) переходит в себя при повороте на 60° и имеет ось симметрии; какое наименьшее число осей симметрии он может иметь?

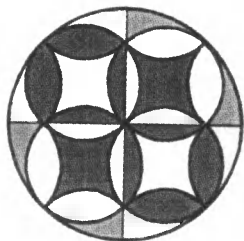


Рис. 11

13. а) Какое количество осей симметрии имеет правильный n -угольник? Узор на рисунке 11?

б) Узор переходит в себя при повороте на 48° . Можно ли утверждать, что он перейдет в себя при повороте на 12° ? На 18° ?

в) Узор имеет две оси симметрии, образующие угол 66° . Какое наименьшее число осей симметрии он может иметь? Перечислите все значения углов, при повороте на которые этот узор заведомо переходит в себя.

ПЛАВНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В этой заметке мы обсудим характерные соображения, возникающие при решении задач, где на последовательность или функцию наложены некоторые локальные ограничения — ей запрещено резко меняться или круто поворачивать — и требуется оценить, насколько большим может оказаться ее колебание в целом.

Игра в «гонки» и вторые разности

Вероятно, многие из наших читателей знают игру «гонки», описанную в книге М.Гарднера «Математические новеллы».

Напомним правила игры. На клетчатой бумаге рисуется более-менее произвольная изогнутая область (трек), у одного края трека для каждого игрока отмечается своя точка старта, у другого края — линия финиша. Автомобилисты по очереди делают ходы в один из узлов сетки, причем изменять скорость разрешается только на единицу: если предыдущий ход автомобиля был \vec{AB} , то следующий ход \vec{BC} либо точно такой же ($\vec{BC} = \vec{AB}$), либо заканчивается в одном из восьми соседних с C узлов. Ходить можно только по отрезкам, целиком лежащим в пределах трека: тот, кто слишком «разогнался» и вылетел за границу, пропускает ход и начинает с единичной скоростью (так же проводится и старт, рис. 1)

По сравнению с другими играми на клетчатой бумаге (например, с «морским боем») эта игра замечательна не только близостью к реальной ситуации, но и разнообразием: ведь каждый новый трек — это новая игра.

Найти наиболее удачный путь

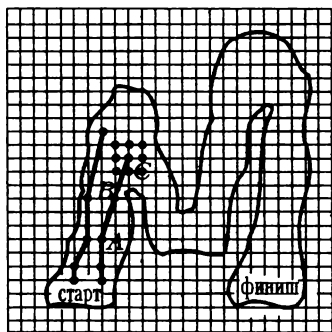


Рис. 1

Статья написана в соавторстве с А.Толпыго.

в сложном треке — задача далеко не простая. Такие задачи очень характерны для теории оптимального управления — сравнительно молодой и быстро развивающейся области математики. Мы не будем касаться общих соображений, относящихся к этой теории, а рассмотрим одну конкретную задачу, навеянную игрой «гонки».

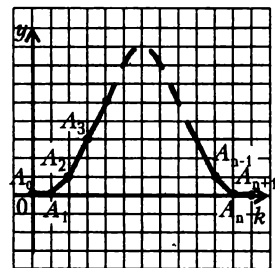
Задача 1. На клетчатой бумаге на одной горизонтальной линии сетки l отмечен отрезок A_0A_1 длины 1 (сторона одной клетки). Нужно, начав с этого отрезка, построить путь, в котором:

1) каждый следующий шаг A_kA_{k+1} либо такой же, как предыдущий ($\vec{A_kA_{k+1}} = \vec{A_{k-1}A_k}$), либо отличается от него на одну единицу вверх или вниз (в отличие от «гонок», скорость смещения вправо всегда остается одинаковой: 1 клетка за каждый шаг);

2) последний отрезок A_nA_{n+1} лежит на той же прямой, что и первый A_0A_1 .

На какую наибольшую высоту, при заданном n , может подняться такой путь над прямой l ?

Рис. 2



Если считать, что отрезки A_0A_1 и A_nA_{n+1} — это отрезки $[0, 1]$ и $[n, n+1]$ оси Ox (рис. 2), то путь вполне определяется последовательностью координат $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$ точек $A_k = (k; y_k)$, причем эта последовательность должна удовлетворять таким условиям:

а) разность разностей $y_{k+1} - y_k$ и $y_k - y_{k-1}$ соседних членов последовательности, т.е. *вторая разность*

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = (y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})$$

при каждом $k, 1 \leq k \leq n$, не превосходит 1;

б) $y_0 = y_1 = y_n = y_{n+1} = 0$, а все другие y_k — целые числа. В задаче спрашивается, *какое наибольшее значение может иметь наибольший член этой последовательности.*

Путь, о котором говорится в первой формулировке, — в некотором смысле «график» последовательности $\{y_k\}$. Даже если бы мы начали сразу с алгебраической формулировки, его очень полезно было бы «выдумать»: он помогает наглядно представить смысл условия а).

Перейдем к решению задачи.

Чтобы удовлетворить условию 1), «верхушка» ломаной $A_m A_{m+1}$ должна быть горизонтальной. Ясно, что можно рассматривать только симметричные пути: если $A_m A_{m+1}$ — самое верхнее звено, то более длинную из частей $A_1 \dots A_m$ и $A_{m+1} \dots A_n$ можно укоротить, заменив ее симметричным отражением другой части относительно серединного перпендикуляра к отрезку $A_m A_{m+1}$. Итак, достаточно рассматривать лишь участок подъема (отведя на него не более $n/2 - 1$ наклонных шагов) — спуск будет точно таким же.

Кстати, отсюда видно, что для четного n максимальная высота подъема — обозначим ее h_n — будет такой же, как и для следующего за ним нечетного числа: $h_n = h_{n+1}$.

Если подниматься и опускаться под углом 45° , то максимальная высота, как нетрудно проверить, будет $[n/2] - 1$. Но такой способ будет наилучшим лишь до $n = 7$ (рис.3, а). На рисунке 3, б показан путь для $n = 8$, который поднимается на высоту 4 (а не на $[8/2] - 1 = 3$).

Найти оптимальный путь нам еще раз помогут соображения симметрии. Ясно, что поначалу выгодно максимальным образом наращивать скорость подъема: $1 + 2 + 3 + \dots$; но — чтобы успеть затормозить — так можно поступать лишь до середины участка подъема $[1; m]$ (рис.4, 5).

Эти соображения можно строго оформить так. Оценим разности одновременно с двух сторон участка:

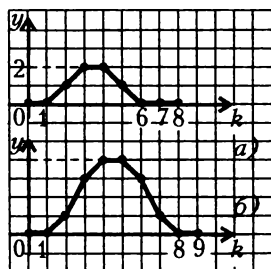


Рис. 3

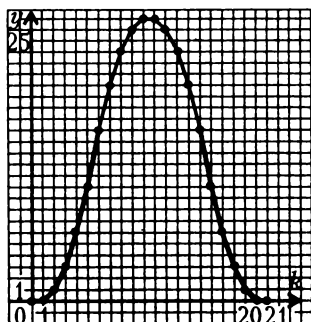


Рис. 4

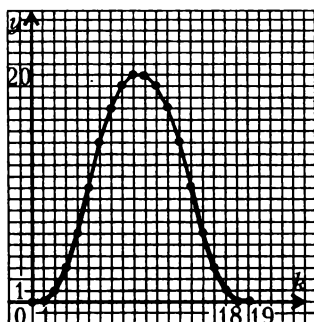


Рис. 5

$$y_1 - y_0 = 0, \quad y_{m+1} - y_m = 0,$$

$$y_2 - y_1 \leq 1, \quad y_m - y_{m-1} \leq 1,$$

$$y_3 - y_2 \leq 2, \quad y_{m-1} - y_{m-2} \leq 2,$$

$$y_4 - y_3 \leq 3, \quad y_{m-2} - y_{m-3} \leq 3,$$

.....

Теперь, чтобы получить оценку для наибольшей высоты h_n подъема, т.е. величину $y_m - y_0 = y_{m+1} - y_0$, нужно сложить оценки первых разностей. Таким образом,

для $n = 4k - 2$ (например, $n = 18$, рис.4)

$$h_n \leq 1 + 2 + \dots + (k-1) + (k-1) + \dots + 2 + 1 = k(k-1);$$

для $n = 4k$ (например, $n = 20$, рис.5)

$$h_n \leq 1 + 2 + \dots + (k-1) + k + (k-1) + \dots + 2 + 1 = k(k-1) + k = k^2.$$

Ясно — из тех же рисунков, — что эти оценки точные, т.е. что такую высоту подъема можно реализовать. В частности, $h_{18} = 20$, $h_{20} = 25$.

Итак, мы нашли наибольшую высоту h_n при любом n . Проверьте, что ответ можно записать в такой компактной форме: $h_n = [n/4] \cdot [(n+2)/4]$, или, еще короче, $h_n = \left[\frac{[n/2]^2}{4} \right]$. (Напомним, что $h_{n+1} = h_n$ при четном n .) Значит, при любом n достаточно точную оценку сверху для h_n дает неравенство $h_n \leq n^2/16$.

Заметим еще, что вершины *оптимальной траектории* в каждой ее четвертой части лежат на одной параболе. Это происходит не случайно. Ведь если последовательность x_0, x_1, \dots, x_m — арифметическая прогрессия (в частности, отрезок натурального ряда), а у последовательности y_0, y_1, \dots, y_m вторые разности $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}$ равны между собой, то точки $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_m; y_m)$ лежат на одной параболе. Именно так обстоит дело в нашем случае (рис.4, 5): в первой и последней четвертях траектории $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = 1$, а в средних четвертях $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = -1$.

Мы увидим, что и в других задачах, где ограничения накладываются на вторые разности, оптимальная траектория также склеена из парабол.

Непрерывный аналог. Скорости и ускорения

Задача 2. *Электровоз, стоявший в точке О, тронулся с места, но, дав «задний ход», через n секунд снова вернулся в точку О и остановился в ней. На какое наибольшее расстояние*

h он мог удалиться за это время от точки *O*, если абсолютная величина его ускорения ни в какой момент не превышала $a \text{ см/с}^2$?

Эта задача — полный аналог задачи 1, с той разницей, что вместо дискретной последовательности y_0, y_1, \dots, y_n теперь речь идет о функции $y(t)$ непрерывного аргумента t (здесь t — время; будем считать, что t пробегает отрезок от 0 до n). Аналогом первых разностей является скорость (первая производная $y'(t)$ от координаты $y(t)$), аналогом вторых разностей — ускорение (вторая производная $y''(t) = (y'(t))'$). Мы решим эту задачу, пользуясь физическими терминами; те, кто уже знаком с производной и интегралом, легко переведут условие задачи и ее решение на язык математического анализа.

Докажем, что ответ в этой задаче таков: $an^2/16 \text{ (см)}$.

Пусть электровоз достиг самого далекого от точки *O* положения *M* в некоторый момент времени t , $0 \leq t \leq n$. Ясно, что скорость его в этот момент равна нулю. Можно считать, что $t \leq n/2$ (в случае $t > n/2$ мы будем следить за движением электровоза на отрезке времени от t до n , а не от 0 до t — ведь до и после момента t движение происходит совершенно аналогично).

Оценим скорость электровоза $v(t)$ при $0 \leq t \leq m$. Поскольку $v(0) = 0$, то $v(t) \leq at$. С другой стороны, поскольку $v(m) = 0$, то $v(t) \leq a(m - t)$. Отсюда следует, что перемещение $h = OM$ — площадь под графиком скорости $v(t)$ на отрезке времени $[0, m]$ — не превышает площади треугольника с основанием m и высотой $am/2$, т.е. $h \leq am^2/4 \leq an^2/16$. Ясно, что эта оценка — точная, причем график оптимального перемещения в каждой четверти отрезка $0 \leq t \leq n$ — парабола (рис.6, $a-\epsilon$).

Мы видим, что для «непрерывного» варианта (задачи 2) ответ и решение получаются более простыми, чем для «дискретного» (задачи 1).

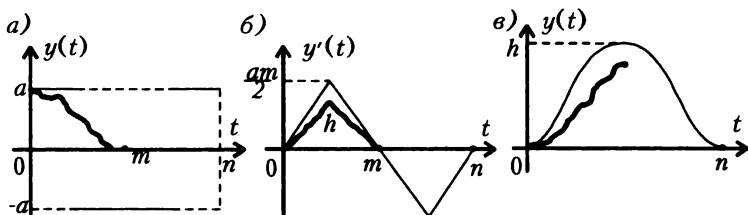


Рис. 6

Большинство реальных задач оптимального управления при их математическом оформлении также допускают и непрерывный, и дискретный варианты. При этом непрерывные модели обычно легче исследовать теоретически, и результаты имеют более красивую форму. Но иногда дискретность задачи диктуется существом дела или упрощает корректную постановку математической задачи; да и для расчетов на ЭВМ приходится переходить обычно к некоторому дискретному приближению непрерывной задачи.

В следующем пункте мы вновь вернемся к дискретной задаче, но теперь числа последовательности будут расположены на окружности.

Числа на окружности. Формулировка результата

Задача 3. На окружности расположены n действительных чисел, одно из которых равно 1, а сумма всех равна 0. Докажите, что:

а) найдутся два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$;

б) найдется число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $16/n^2$.

Далее мы очень кратко изложим решение, позволяющее получить для каждого n точные оценки в утверждениях а) и б). Эти наилучшие возможные оценки таковы:

а) максимальная из разностей между соседними числами не меньше

$$\frac{4}{n}, \text{ если } n \text{ четно, и не меньше } \frac{4n}{n^2 - 1}, \text{ если } n \text{ нечетно (заметим, что } \frac{4n}{n^2 - 1} > \frac{4}{n} \text{);}$$

б) максимальное отклонение числа от среднего арифметического двух его соседей не меньше соответственно $\frac{16}{n^2}$, $\frac{16n}{n^3 + n - 2}$, $\frac{16}{n^2 + 4}$ или $\frac{16n}{n^3 + n + 2}$, если n дает при делении на 4 остаток 0, 1, 2 или 3.

На рисунках 7 и 8 изображены оптимальные последовательности (при $n = 30$): для последовательности на рисунке 7 разность между любыми соседними числами не меньше $2/15$ (это — $4/n$ при $n = 30$); для последовательности на рисунке 8 отклонение каждого числа от среднего арифметического двух соседей не меньше $2/113$ и, как и в первой задаче, точки в каждой четверти отрезка лежат на одной параболе. Доказательство результатов а) и б) мы проведем ниже лишь для $n = 30$ (для других n оно примерно такое же). Тем самым мы получим решение цикла задач М398 из «Задачника «Кванта».

Обозначим данные числа через $y_{-14}, y_{-13}, \dots, y_{15}$ так, что $y_0 = 1$. Для задачи а) получить нужную оценку нетрудно: если $|y_{k+1} - y_k| \leq \alpha$ для

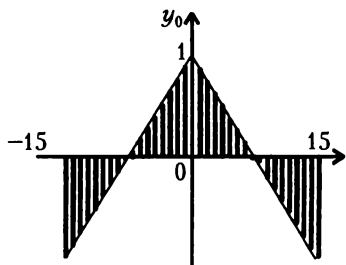


Рис. 7

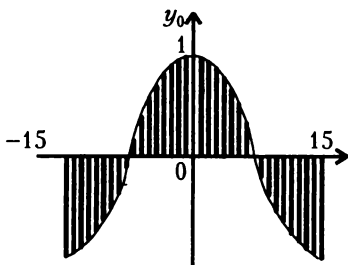


Рис. 8

всех $k = -14, \dots, 15$, то, суммируя оценки разностей, как и в задаче 1, получим $y_k \geq 1 - |k|\alpha$. Но сумма $\sum y_k$ равна нулю, поэтому

$$0 = \sum y_k \geq 30 - 2(1 + 2 + \dots + 14)\alpha - 15\alpha = 30 - 15^2 \alpha,$$

откуда $\alpha \geq 2/15$.

Перейдем к задаче 6). Заметим, что величина $\frac{y_{k+1} + y_{k-1}}{2} - y_k$, которую мы должны оценить, — это просто половина «второй разности» $(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})$.

Нормировка и повторение. Попробуем действовать с помощью двукратного применения задачи а).

Пусть $y_{k+1} - y_k = y'_k$, $\max_k |y'_k| = \alpha$.

Согласно а), $\alpha \geq 2/15$. К последовательности $z_k = y'_k/\alpha$ мы можем вновь применить а) (нетрудно убедиться, что сумма всех 30 чисел z_k равна нулю и что максимальное из z_k равно единице); поэтому $\max_k |z_{k+1} - z_k| \geq 2/15$, а следовательно

$$\max_k \frac{|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}|}{2} = (\alpha/2) \max_k |z_k - z_{k-1}| \geq (1/15)\alpha \geq 2/225.$$

Эта оценка примерно вдвое хуже требуемой (в общем случае так же получится оценка $8/n^2$ вместо $16/n^2$).

Идея более тонкой оценки проста: нужно, исходя из оценки $|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}| \leq 2\beta$ для вторых разностей, точнее оценить первые разности, затем оценить сами числа y_k (пользуясь тем, что $y_0 = 1$) и, наконец, из равенства $\sum y_k = 0$ получить оценку снизу для β .

Симметризация и комбинированная оценка. Прежде чем перейти к осуществлению нашего плана, заметим, что можно ограничиться рассмотрением лишь симметричных последовательностей: таких, для которых $y_k = y_{-k}$. В самом деле, из любой последовательности y_k ,

¹Здесь и ниже k пробегает значения $14 \leq k \leq 15$. Для $k = 15$ мы полагаем $y_{k+1} = y_{-14}$, ведь соседнее с y_{15} число на окружности — это y_{-14} .

удовлетворяющей условиям $y_0 = 1$, $\sum y_k = 0$, $|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}| \leq 2\beta$, мы можем получить симметричную последовательность $z_k = \frac{y_k + y_{-k}}{2}$, удовлетворяющую, как нетрудно проверить, всем этим условиям. (В наших обозначениях $y_0 = y_{-0} = y_{15} = y_{-15} = 1$.)

Теперь имеем:

$$y_0 - y_1 = (2y_0 - y_1 - y_{-1})/2 \leq \beta, \quad y_{14} - y_{15} \leq \beta,$$

$$y_1 - y_2 \leq 3\beta, \quad y_{13} - y_{14} \leq 3\beta,$$

$$y_2 - y_3 \leq 5\beta, \quad y_{12} - y_{13} \leq 5\beta,$$

$$y_6 - y_7 \leq 13\beta, \quad y_7 - y_8 \leq 15\beta, \quad y_8 - y_9 \leq 13\beta.$$

Из первых семи неравенств находим

$$y_k \geq 1 - k^2\beta \text{ при } 0 \leq k \leq 7;$$

из остальных

$$y_k \geq 1 - (7^2 + 8^2)\beta + (15 - k)^2\beta \text{ при } 7 \leq k \leq 15.$$

Суммируя все y_k (напомним, что $y_k = y_{-k}$), найдем $0 \geq 30 - 15(7^2 + 8^2)\beta$, откуда $\beta \geq 2/113$.

В заключение — несколько задач, в том или ином отношении связанных с рассмотренными выше.

1. В последовательности a_0, a_1, \dots, a_n числа a_0 и a_n равны нулю, а модуль разности между каждым числом и средним арифметическим двух его соседей не превосходит единицы. Докажите, что $a_k \leq k(n-k)$.

2. Известно, что a_0, a_1, \dots — натуральные числа, $a_1 > a_0$, и $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$ при всех $k > 1$. Докажите, что $a_{100} > 2^{99}$.

3. Даны числа a_1, \dots, a_7 . Известно, что их сумма равна нулю и что наибольшее из них по абсолютной величине $a_1 = 2$. Оцените максимум абсолютной величины вторых разностей.

4. Дан некоторый набор чисел a_1, \dots, a_n . Известно, что

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1, \quad 0 \leq a_2 \leq a_3 \leq 2a_2,$$

и т.д. Докажите, что в сумме $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ можно выбрать знаки так, чтобы выполнялось неравенство $0 \leq S \leq a_1$.

5. а) Пусть x_0, x_1, \dots, x_n и y_0, y_1, \dots, y_n — две последовательности такие, что их «вторые разности» постоянны: $x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = a$, $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = b$ ($1 \leq k \leq n-1$). Докажите, что точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, ..., $(x_n; y_n)$ лежат на одной прямой или на одной параболе в плоскости Oxy .

б) Докажите, что точки $(x; y)$, где $x = a_1 t^2 + b_1 t + c_1$, $y = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$, лежат на одной прямой или на одной параболе.

6. Пусть функция f определена на отрезке $[0, n]$, $f(0) = f(n) = 0$. Какого наибольшего значения может достигать f , если а) $|f'(x)| \leq M_1$, б) $|f''(x)| \leq M_2$? (Производные непрерывны всюду, кроме конечного числа точек; f непрерывна на $[0, n]$.)

7. Пусть функция f периодична с периодом T , имеет первую (а в задаче б) — вторую) производную, непрерывную при всех x . Пусть

$$\int_0^T f(x) dx = 0, \max_x |f(x)| = M_0.$$

а) Докажите, что если $\max_x |f'(x)| = M_1$, то $M_0 \leq (M_1 T)/4$.

б) Докажите, что если $\max_x |f''(x)| = M_2$, то $M_0 \leq (M_2 T^2)/16$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Во многих математических теориях и прикладных задачах, а также в математических играх и головоломках возникают вопросы такого рода: можно ли перейти от одной позиции к другой с помощью некоторых «допустимых» операций (ходов)? Как найти нужную цепочку ходов, если она существует, или доказать, что переход невозможен? В этой статье мы разберем несколько задач такого типа. Их объединяет еще и внешнее сходство: в каждой из них фигурируют целые числа, а «препятствия» переходам, как правило, имеют арифметическую природу.

Примеры, с которых начинается обсуждение каждой задачи, вполне доступны даже ученикам младших классов. Упражнения «со звездочкой» и доказательства общих результатов требуют от читателя серьезных размышлений. Заканчивается статья трудными олимпиадными задачами, последняя из которых примыкает к неэлементарной, бурно развивающейся сейчас теории арифметических групп.

Задача о коне

Задача 1. *Даны натуральные числа m и n . На одном из полей бесконечной шахматной доски стоит фигура, которая ходит «буквой Г» на m полей в одном из направлений и на n в перпендикулярном; назовем ее $\{m; n\}$ -конем. На какие поля доски этот конь может попасть?*

Обычный шахматный конь ($\{1; 2\}$ -конь) может из любого начального поля O попасть на любое другое: за три хода он может попасть на соседнее с O поле, а такими элементарными шагами можно, конечно, прийти куда угодно.

А вот $\{1; 3\}$ -конь, несколько ходов которого показаны на рисунке 1, никак не может попасть на соседнее (по горизонтали) с начальным поле. На шахматной доске очень легко объяснить, что препятствует такому переходу: $\{1; 3\}$ -конь всегда ходит по полям одного цвета. С другой стороны, нетрудно

Написано в соавторстве с В.Гутенмахером.

показать, что $\{1; 3\}$ -конь может обойти все поля одного цвета: за три хода он может сдвинуться по диагонали на соседнее поле того же цвета (рис.1), а такими элементарными шагами уже легко обойти все одноцветные поля.

Попробуйте решить задачу 1 для чисел

- а) 2 и 5; б) 3 и 7; в) 10 и 25;
г) 19 и 79.

Оказывается, $\{m; n\}$ -конь может попасть на любое поле в том и только том случае, когда m и n имеют разную четность и их наибольший общий делитель равен 1.

Полный ответ к задаче 1 приведен в конце раздела «Алгоритм Евклида» (упражнение 10). Сейчас мы займемся более простым вопросом. Результат, который мы получим, полезен и для задачи о коне, и для более серьезных математических задач.

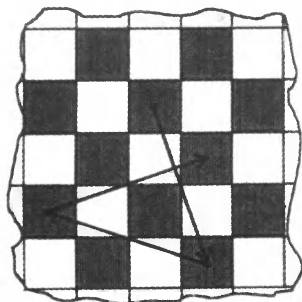


Рис.1. $\{1; 3\}$ -конь может попасть на соседнее (по диагонали) поле того же цвета; такими шагами он может обойти все одноцветные поля

Представление НОД

Задача 2. Даны натуральные числа a и b . За один ход разрешается прибавить к некоторому целому числу одно из чисел a , b или вычесть из него одно из этих чисел. Можно ли таким образом из числа 0 получить число c ?

В этой задаче множество «позиций» — это множество \mathbb{Z} всех целых точек числовой прямой.

Начнем с конкретного примера. Предположим, что у покупателя и кассира есть только купюры в 10 и 25 рублей, причем (чего не бывает в математических задачах!) в неограниченном количестве. Ясно, что покупатель может заплатить кассиру s рублей в том и только том случае, когда s кратно 5.

Еще пример. Пусть на множестве \mathbb{Z} разрешены ходы ± 19 и ± 79 . С помощью этих ходов можно получить любое целое число: их комбинация позволяет сдвинуться на расстояние 3, а затем и на расстояние 1 (рис.2,а).

Более сложный пример: $a = 819$, $b = 357$. В этом случае тем же приемом удастся найти кратчайший сдвиг — на 21 (рис.3,а). Таким образом, здесь можно устроить переход на любое расстояние, кратное 21. С другой стороны, и a , и b делятся на 21, поэтому никакие другие переходы невозможны.

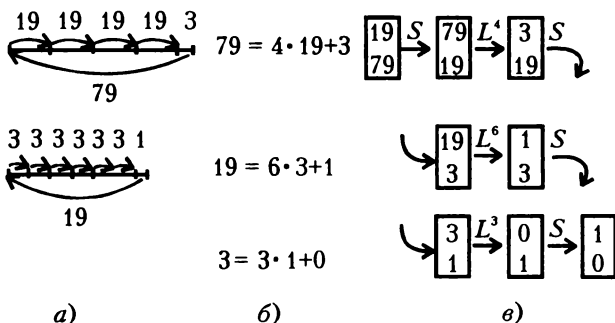


Рис.2. Числа 19 и 79 взаимно просты, поэтому после нескольких делений с остатком получается остаток $1 = \text{НОД}(19, 79)$

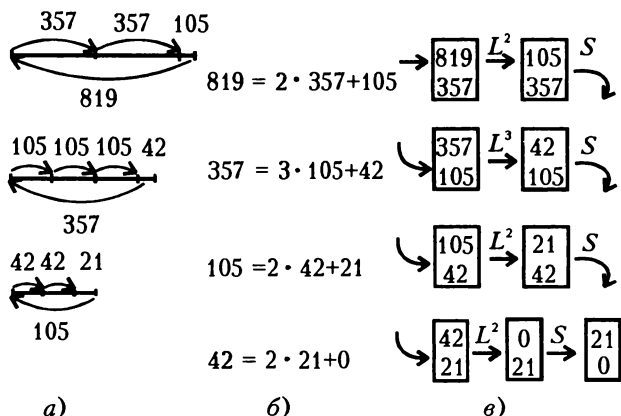


Рис.3. Чтобы найти $\text{НОД}(819, 357) = 21$ с помощью алгоритма Евклида, надо сделать четыре шага

Заметим, что 21 – наибольший общий делитель чисел 819 и 357 (проверьте это!).

Упражнение 1. а) Докажите, что если у покупателя и кассира есть (в неограниченном количестве) трешки и пятерки, то покупатель может заплатить любое число рублей.

б) Можно ли перейти от 0 к 1000, если $a = 123$, $b = 456$? если $a = 589$, $b = 1984$?

в) Какие переходы возможны при $a = 18$, $b = 81$?

Теперь сформулируем ответ к задаче 2 в общем виде.

Пусть наибольший общий делитель (НОД) чисел a и b равен d . Тогда переход от 0 к s возможен в том и только том случае, когда число s делится на d .

Попробуйте доказать это.

В несколько иной форме мы получим этот результат в следующем пункте.

Упражнения

2. Докажите, что ответ к задаче 2 не изменится, если число a разрешается только прибавлять, а b — только вычитать.

3. Можно ли на чашечных весах с помощью гирь 36 г и 60 г (эти гири имеются в неограниченном количестве, и их можно класть на обе чашки весов) отвесить а) 150 г; б) 132 г?

Алгоритм Евклида

В следующей задаче позициями будут пары целых чисел.

Задача 3. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдает новую карточку: первый автомат, прочитав карточку с парой $(x; y)$, выдает карточку $(x - y; y)$, второй — карточку $(x + y; y)$, третий — карточку $(y; x)$.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(1; 2)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку $(19; 79)$? $(819; 357)$?

Какие вообще карточки можно получить, если первоначально имеется карточка с парой чисел $(a; b)$?

Обозначим операции, которые проделывают автоматы, соответственно через L , R и S . Начнем опять с числовых примеров.

Пару $(19; 79)$ из пары $(1; 2)$ операциями L , R , S получить можно. Чтобы осуществить нужный переход, удобнее не подниматься от $(1; 2)$ к $(19; 79)$, а спускаться в обратном направлении (рис.4).

Записав получившуюся цепочку в обратном порядке (и, конечно, заменяя при этом L и R), получим «подъем» от $(1; 2)$ к $(19; 79)$.

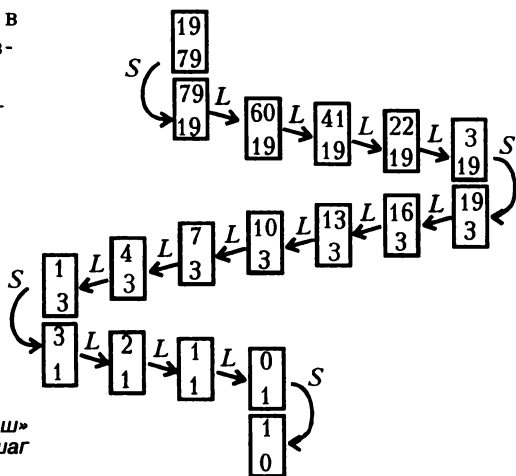


Рис.4. Каждый «марш» этой лестницы — один шаг алгоритма Евклида

На рисунке 4 «спуск» от (19; 79) к (1; 2) мы продолжили до пары (1; 0); сокращенная запись этого «спуска» приведена на рисунке 2, в (L^k означает, что операция L проделывается k раз подряд). Собственно говоря, тот же спуск мы уже проделывали в соответствующем примере к предыдущей задаче (рис. 2, а).

Спуск, начинающийся с пары (819; 357), сокращенно записан на рисунке 3, в – запишите его подробно. Здесь пара (1; 2) (или (1; 0)) не получается. И не удивительно – тому есть препятствие: *все получаемые числа делятся на 21*. В каком бы порядке мы ни применяли операции L , R , S , избавиться от этого препятствия не удастся, поскольку, как нетрудно доказать, эти операции сохраняют общие делители чисел на карточке: $\text{НОД}(x - y, x) = \text{НОД}(x + y, y) = \text{НОД}(x, y)$. Поэтому перейти от пары (819; 357) к паре (1; 2) или обратно нельзя.

Упражнение 4. Можно ли с помощью операций L , R , S перейти а) от пары (1; 10) к паре (5; 25)? б) от (18; 81) к (36; 63)? в) от (589; 1984) к (31; 1953)?

Теперь мы можем сформулировать ответ на последний, общий вопрос задачи 3: *пару $(a; b)$ можно перевести в пару $(p; q)$ в том и только том случае, когда $\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(p; q)$* . Это условие необходимо, поскольку, как мы уже говорили, наши операции сохраняют НОД. Но оно также и достаточно: если $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(p, q) = d$, то каждую из этих пар операциями L , R , S можно привести к паре $(d; 0)$; проделав спуск от $(a; b)$ к $(d; 0)$ и затем подъем от $(d; 0)$ к $(p; q)$, мы получим цепочку от $(a; b)$ к $(p; q)$.

Покажем, почему от любой пары $(a; b)$ можно перейти к паре $(d; 0)$. Заметим, что если один из элементов пары отрицателен, то его легко сделать положительным (рис. 5). А пару $(a; b)$ с натуральными a и b можно привести к паре $(d; 0)$ тем же способом, который мы применили

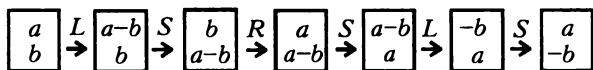


Рис. 5. Операциями L , R , S можно поменять знак у одного числа на карточке

в примерах: на каждом шаге (кроме перестановок-симметрий) больший элемент пары уменьшается до тех пор, пока мы не придем к финалу $\rightarrow (d; d) \rightarrow (0; d) \rightarrow (d; 0)$.

Решая задачу 3, мы получили удобный способ отыскания наибольшего общего делителя двух чисел: от пары $(a; b)$, где $a > b > 0$, переходим к паре $(b; r)$, где r – остаток от деления

a на b , и повторяем эту операцию до тех пор, пока не получим пару $(d; 0)$. Последний не равный нулю остаток d и есть НОД($a; b$) (рис.2,б, 3,б). Этот способ называется алгоритмом Евклида.

Упражнения

5. Докажите, что из пары (1357; 2468) нельзя получить пару (1234; 5678); из пары (123; 457) нельзя получить (7890; 1979).

6. Приведите примеры, показывающие, что операции задачи 3 не перестановочны: $LS \neq SL$, $RS \neq SR$ (разумеется, $LR = RL$).

7. Найдите с помощью алгоритма Евклида НОД(589, 1984), НОД(123456789, 987654321).

Целочисленной решеткой \mathbb{Z}^2 называется множество всех точек плоскости с целыми координатами.

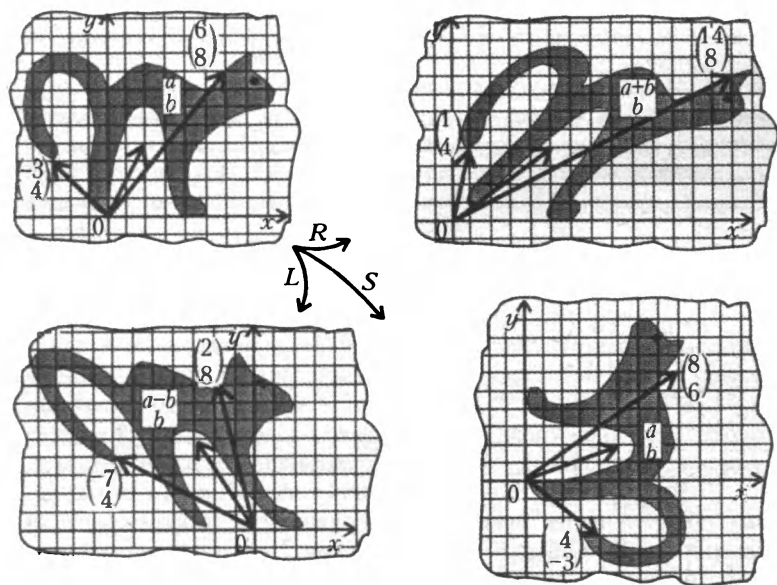


Рис.6. «Левый перекус» $L(x; b) \rightarrow (x - b; b)$, «правый перекус» $R(x; b) \rightarrow (x + b; b)$, «симметрия» $S(x; b) \rightarrow (b; x)$ – линейные преобразования плоскости, осуществляющие взаимно однозначные отображения целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 на себя

Следующее упражнение и рисунок 6 проясняют геометрический смысл задачи 3:

8. Докажите, что если отрезок OA , где O – начало координат, A – узел целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 , разбивается другими узлами на d

частей, то операциями L , R и S узел A можно перевести в узлы $(d; 0)$ и $(-d; 0)$ и нельзя перевести ни в какие другие точки оси Ox .

Упражнения 9 и 10 обобщают задачи 1 и 2:

9°. Пусть заданы n натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Докажите, что целое число s можно получить из 0 ходами $\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_n$ тогда и только тогда, когда s делится на $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

10°. а) Пусть на плоскости Oxy заданы n векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ с целочисленными координатами. Докажите, что множество точек D плоскости, в которые можно попасть из точки O ходами $\pm \vec{v}_1, \pm \vec{v}_2, \dots, \pm \vec{v}_n$, представляет собой множество вершин некоторой косоугольной решетки (так называется множество вершин параллелограммов, на которые два семейства равноотстоящих параллельных прямых разрезают плоскость).

б) Пусть вместе с каждым вектором \vec{v}_i в семействе векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ имеется равный ему по длине и перпендикулярный. Тогда множество «достижимых» точек D будет множеством вершин некоторой квадратной решетки.

Теперь уже нетрудно найти ответ к задаче 1: пусть $m = dm_1$, $n = dn_1$, где $d = \text{НОД}(m, n)$; тогда, если $m_1 + n_1$ нечетно, достижимы все поля $(dx; dy)$, где x и y — произвольные целые числа (решетка с шагом d); если же $m_1 + n_1$ четно — поля $(dx; dy)$, где $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ и $x + y$ четно (решетка с шагом $d\sqrt{2}$, повернутая на угол 45° по отношению к линиям доски).

Некоторые итоги

В заключительной части статьи мы познакомим вас еще с двумя довольно трудными задачами. Но прежде, оглянувшись назад, попробуем высказать общие соображения, которые помогли нам — и помогут в дальнейшем — выяснять, возможен ли переход от одной «позиции» к другой, и назовем математические «имена» тех понятий, которые встретились нам в задачах.

1°. Чтобы доказать невозможность того или иного перехода, мы обнаруживали некоторое препятствие — характеристику позиции, сохраняющуюся (как говорят, *инвариантную*) при всех допустимых ходах, но различную для начальной и конечной позиций; таким образом, доказательство невозможности того или иного перехода сводилось к отысканию подходящего *инварианта*. Таким инвариантом в задаче о $\{1; 3\}$ -коне является цвет поля, в задаче 2 — остаток от деления числа на $\text{НОД}(a, b)$, в задаче 3 — НОД пары чисел на карточках.

2°. Чтобы построить цепочку переходов на решетке, часто бывает полезно найти какой-то элементарный «ключевой» ход (или комбинацию ходов), либо свести дело к какой-то простейшей *канонической* позиции, а затем уже сформулировать об-

щее правило (алгоритм) отыскания переходов. Так, в задаче о $\{1; 3\}$ -коне достаточно научиться делать ход по диагонали, в задаче 2 – сдвиг на $d = \text{НОД}(a, b)$, в задаче 3 – «спуск» к канонической позиции $(d; 0)$.

3°. Во всех рассмотренных пока задачах переходы были обратимы: если от позиции A можно было перейти к позиции B , то можно было вернуться и обратно – от B к A . В таких задачах все множество позиций разбивается на классы эквивалентности: внутри одного класса от каждой позиции можно перейти к любой другой, а никакие переходы между позициями из различных классов невозможны.

Сейчас мы рассмотрим задачу, в которой такой обратимости нет, но зато в ней прекрасно работают соображения 1° и 2°.

Избавление от двоек

Задача 4. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом: первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a + 1; b + 1)$; второй автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a/2; b/2)$ (он работает только в том случае, когда оба числа a и b четны); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$.

Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку $a)$ $(1; 50)$; $b)$ $(1; 100)$?

Пусть первоначально имеется карточка $(a; b)$, $a < b$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких n это можно сделать?

Эта задача предлагалась на XII Всесоюзной математической олимпиаде ученикам 8 – 10 классов. Впрочем, даже пятиклассникам хватит знаний, чтобы решить ее.

Обозначим операции, которые выполняют наши новые автоматы, соответственно, через I , H и T . На рисунке 7 показано, как из карточки $(5; 19)$ получить

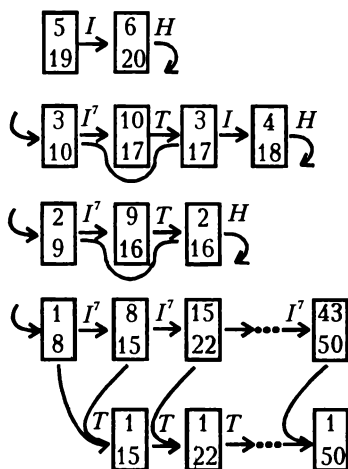


Рис. 7. С помощью операций I^q (увеличение на q), H (деление пополам), T («транзитивный» переход) из $\begin{smallmatrix} 5 \\ 19 \end{smallmatrix}$ получаем $\begin{smallmatrix} 1 \\ 50 \end{smallmatrix}$

«простейшую» карточку (1; 8) и затем – карточку (1; 50) (вместо « k раз применить операцию I » мы снова пишем I^k). Таким образом, в задаче а) ответ утвердительный.

А вот карточку (1; 100), про которую спрашивается в задаче б), из карточки (5; 19) получить не удастся. Препятствие можно обнаружить, внимательно изучив тот же рисунок 7: *разность чисел на каждой карточке делится на 7*. В каком бы порядке мы ни применяли автоматы, избавиться от этого свойства не удастся – его сохраняют операции I , H и T . (Для I это очевидно. Для H : если a и b – четные и $b - a$ делится на 7, то и $b/2 - a/2$ делится на 7. Для T : если разности $b - a$ и $c - b$ делятся на 7, то и $c - a = (c - b) + (b - a)$ делится на 7.) Но разность $100 - 1 = 99$ на 7 не делится, так что ответ к б) отрицательный.

Упражнение 11. Можно ли, используя автоматы I , H и T , а) из карточки (3; 33) получить карточки (5; 29), (1; 101), (1; 1978)?

б) Из карточки (5; 29) получить (3; 33), (1; 100), (1; 1979)?

Сформулируем теперь ответ на последний, общий вопрос задачи 4: *из карточки $(a; b)$, в которой $b - a = 2^m d$, где $d > 0$ и нечетно, можно получить те и только те карточки $(p; q)$, в которых разность $p - q > 0$ делится на d* . Таким образом, можно избавиться от всех двоек в разложении $b - a$, но нечетный делитель разности $b - a$ служит непреодолимым препятствием.

В самом деле, как мы уже говорили (для $d = 7$), из карточек, у которых разность делится на нечетное число d , с помощью

операций I , H , T получаются только карточки, обладающие тем же свойством. С другой стороны, от карточки $(a; b)$, где $b - a = 2^m d$ (d нечетно), можно перейти к карточке $(1; d + 1)$. (Один шаг такого перехода показан на рисунке 8.) Получив карточку $(1; d + 1)$, легко изготовить любую карточку $(1; kd + 1)$ (как в задаче а) – из карточки (1; 8)) и затем – любую карточку $(l; kd + l)$ с разностью чисел, кратной d .

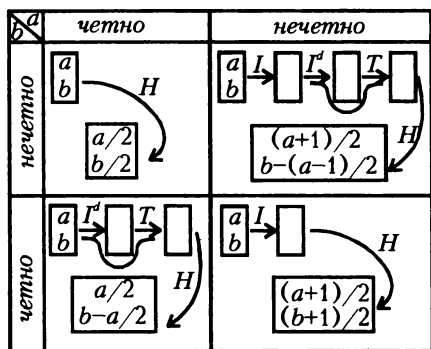


Рис. 8. Большее число b на карточке $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ можно уменьшить ($d = b - a$; $a > 1$ или $a = 1$, b нечетно)

Упражнения

12. а) Предположим, что автомат, выполняющий операцию T , сломался. Какие карточки можно получить из $(5; 19)$? $(5; 29)$?

б) Пусть сломался автомат, выполняющий операцию H . Какие карточки можно получить из карточки $(a; b)$?

13*. Какие карточки можно получить операциями I , H , T из n данных карточек $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$, ..., $(a_n; b_n)$?

Задача 4 выглядит довольно искусственной. Поэтому, возможно, вам будет интересно узнать, что она возникла из леммы в одной серьезной математической книге (С.Улам, «Нерешенные математические задачи»).

Пары векторов

Следующая задача продолжает задачу 3. Здесь фигурируют те же три операции L , R и S , но в задаче 3 они применялись к парам целых чисел, а теперь «позициями» будут пары векторов $(a; b)$ и $(c; d)$ с целыми координатами, и эти операции будут применяться одновременно к обоим векторам пары. Координаты обоих векторов удобно записывать в два столбика – получится

табличка $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ из четырех чисел; такие таблички в математике называются *матрицами*.

Задача 5. С матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ разрешается проделывать следующие операции:

$$L: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$R: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$S: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}.$$

Можно ли этими операциями из матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ получить следующие матрицы: а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;
д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Какие вообще матрицы можно получить из данной матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$?

Будем называть две матрицы *эквивалентными*, если одну из них операциями L , R и S можно перевести в другую (здесь переходы обратимы, так что все матрицы разбиваются на классы эквивалентных).

В решении очень трудной задачи 5 нам встретится несколько препятствий. Будем преодолевать их последовательно.

а) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ не эквивалентны; второй вектор $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ никак нельзя перевести в $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, поскольку $\text{НОД}(5, 7) \neq \text{НОД}(3, 9)$. Вообще, из результата задачи 3 сразу вытекает условие, необходимое для эквивалентности двух матриц

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} \text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(p, q), \\ \text{НОД}(c, d) = \text{НОД}(r, s). \end{cases} \quad (*)$$

Однако, как мы сейчас увидим, это условие не достаточно для эквивалентности матриц. Во всяком случае, если это условие выполнено, мы можем разделить каждый столбец матрицы на его НОД и далее рассматривать такие *сокращенные* матрицы (ведь НОД каждого столбца сохраняется при всех операциях).

б) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ не эквивалентны, потому что при любом преобразовании L , R , S из матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ получится матрица с одинаковыми столбцами $\begin{pmatrix} p & p \\ q & q \end{pmatrix}$.

в) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ тоже не эквивалентны; тут возникает новое препятствие: величина

$$\Delta = \Delta \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = |ad - bc|.$$

¹ Термин «сокращенная» естественно возникает, если смотреть на матрицу $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ как на пару дробей $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$.

Она сохраняется при всех преобразованиях L, R, S матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Проверим это для L : $(a-b)d - b(c-d) = ad - bc$. (Для R и S проведите проверку сами.) Поскольку $\Delta \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 3$, а $\Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, эти матрицы не эквивалентны.

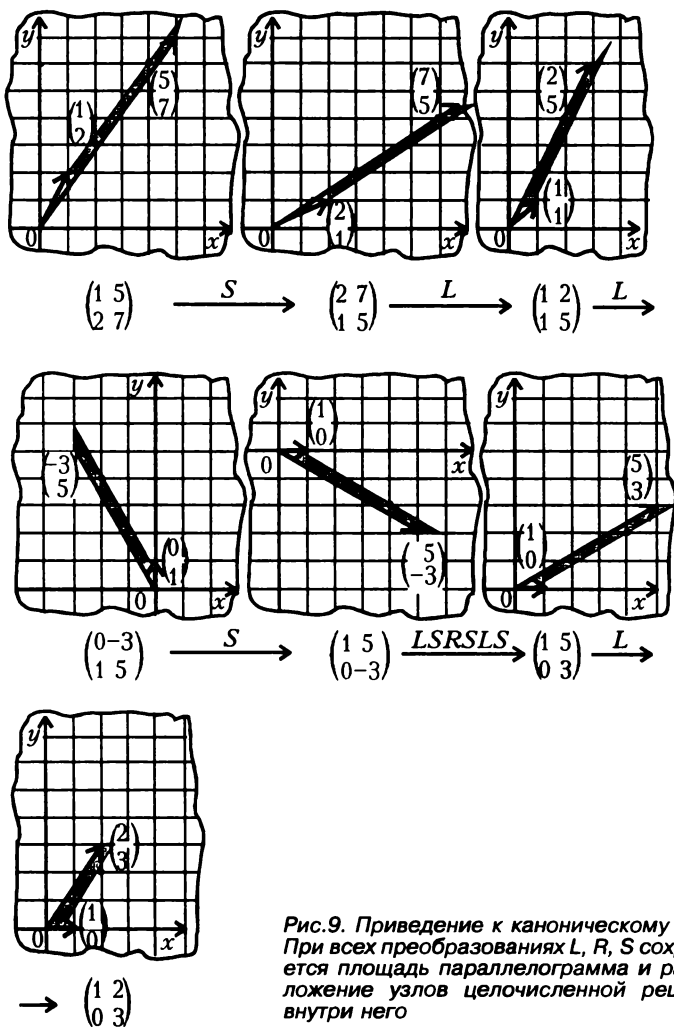


Рис.9. Приведение к каноническому виду. При всех преобразованиях L, R, S сохраняется площадь параллелограмма и расположение узлов целочисленной решетки внутри него

Заметим, что

$$\Delta \begin{pmatrix} p & p \\ q & q \end{pmatrix} = 0.$$

Величина $ad - bc$ очень часто возникает в разных задачах про матрицы и называется *определителем* матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

г) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ эквивалентны: цепочка преобразований, приводящих первый вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ к каноническому виду $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, и небольшие дополнительные ухищрения приводят к цели (рис.9). На рисунке 9 хорошо виден и наш инвариант Δ : это — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Осталось еще выяснить,

д) эквивалентны ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Оказывается, нет, хотя указать препятствие здесь не так просто. Его геометрический смысл ясен из рисунков 9 и 10.

Теперь мы можем дать ответ на общий вопрос задачи 5. Любую сокращенную матрицу операциями L , R , S можно преобразовать к *каноническому виду*

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \text{ где } 0 \leq r < \Delta, \quad (1)$$

$$\text{НОД}(r, \Delta) = 1,$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (если } \Delta = 0 \text{)}. \quad (2)$$

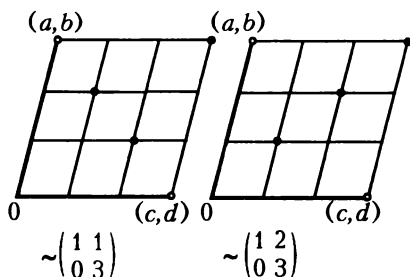


Рис. 10. В параллелограммах для матриц $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ расположение узлов целочисленной решетки различно

Две матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены условия (*) и соответствующие сокращенные матрицы имеют один и тот же канонический вид. (Несколько иначе критерий эквивалентности сформулирован в упражнении 20.)

В самом деле, любую сокращенную матрицу можно преобразовать к каноническому виду так же, как раньше мы преобразовали матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (см. рис.9). Тот факт, что r является инвариантом, вытекает из упражнений 14, 15.

Упражнения

14*. Пусть матрица $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ имеет канонический вид (1). Тогда внутри параллелограмма $OABC$, построенного на векторах $\vec{OA} = (a; b)$ и $\vec{OC} = (c; d)$, лежит $\Delta - 1$ целая точка. Все эти точки $M_1, M_2, \dots, M_{\Delta-1}$ могут быть получены при помощи векторных равенств:

$$O\vec{M}_j = \{j/\Delta\} O\vec{C} + \{j(1 - r/\Delta)\} O\vec{A},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x .

15. Пусть $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(c, d) = 1$, $\Delta = |ad - bc| \neq 0$. Тогда существует единственное r такое, что $0 \leq r < \Delta$, $\text{НОД}(r, \Delta) = 1$ и оба числа $ra - c$, $rb - d$ делятся на Δ , причем это r сохраняется при преобразованиях L, R, S матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Это упражнение удобно для конкретных вычислений числа r , если Δ невелико.

16. Какие матрицы среди следующих эквивалентны, а какие — нет:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 17 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 19 & 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 79 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 39 & 60 \\ 50 & 77 \end{pmatrix}?$$

17. Выше мы не рассматривали матрицы, у которых один из столбцов нулевой. В каком случае такие матрицы эквивалентны?

18. Докажите, что любые две матрицы, у которых $\Delta = 1$, эквивалентны.

19*. Сколько существует всего классов неэквивалентных матриц с $\Delta = 3$, $\Delta = 4$, $\Delta = 5$, $\Delta = 10$, $\Delta = 12$? Сколько среди них сокращенных? Нарисуйте для каждого класса матриц расположение узлов в соответствующем параллелограмме (как на рисунке 10).

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА И РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Широко распространен взгляд на математика как на человека, беспрерывно занимающегося сложнейшими арифметическими вычислениями (в более утонченном варианте – выписывающего и преобразующего длинные и сложные формулы). Читателям «Кванта» хорошо известно, что бывает красивая и важная математика «без формул», однако доля истины в таком взгляде все же есть. Умение взглянуть на формулы с неожиданной точки зрения, преобразовывать их, открывать новые, находить связи между ними – важная часть работы математика. В этой статье мы рассмотрим каскад любопытных формул, связанных со знаменитой последовательностью «многочленов Чебышева» (некоторые из этих формул предлагалось доказать в задаче М488), а также общие математические идеи, которые стоят за ними.

Введение. Две замечательные последовательности многочленов

Многочлены, о которых будет идти речь, встречаются во многих задачах анализа, вычислительной математики, алгебры. Они появились в 1845 году, в работе русского математика Пафнутия Львовича Чебышева в связи с таким вопросом.

Рассмотрим всевозможные многочлены данной степени n со старшим коэффициентом 1; какой из них *наименее уклоняется от нуля* на отрезке $[-1; 1]$, т.е. для какого многочлена $F_n(x) = x^n + \dots$ величина

$$c_n = \max_{[-1,1]} |F_n(x)|$$

наименьшая?

Оказывается, это $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ – многочлен из левой колонки таблицы 1, деленный на старший коэффициент. Например, среди квадратных трехчленов – это $x^2 - \frac{1}{2}$ (его *отклонение*

Статья написана в соавторстве с А.Зелевинским.

от нуля c_2 равно $\frac{1}{2}$, а у любого другого квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ оно больше); среди кубических многочленов – это $x^3 - \frac{3}{4}x$ (для него $c_3 = \frac{1}{4}$); и вообще отклонение от нуля $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ многочлена $\tilde{T}_n(x)$ меньше, чем у любого другого многочлена $F_n(x) = x^n + \dots$ степени n .¹

Таблица 1. Многочлены Чебышева первого и второго рода. Если умножить каждый из многочленов на $2x$ и вычесть предыдущий (стоящий над ним), получится следующий.

n	T_n	U_n
0	1	1
1	x	$2x$
2	$2x^2 - 1$	$4x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$	$8x^3 - 4x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
	

Если же отклонение от нуля измерять иначе – заменить выражение c_n выражением

$$l_n = \int_{-1}^1 |F_n(x)| dx,$$

то наименее уклоняющимся от нуля многочленом n -й степени со старшим коэффициентом 1 окажется многочлен $\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x)$, где $U_n(x)$ берется из правой колонки таблицы 1: для многочлена $U_n(x)$ величина l_n (выделенная площадь на рисунке 1) равна 2; стало быть, для \tilde{U}_n она равна $1/2^{n-1}$; для любого другого многочлена $F_n(x) = x^n + \dots$ она больше (теорема А.Н.Коркина и Е.И.Золотарева).

Эти факты связаны с такими характеристическими свойствами *многочленов Чебышева*:

¹ Здесь мы доказывать этого не будем. Элементарное доказательство можно найти в [1] – первой книге из списка литературы в конце статьи.

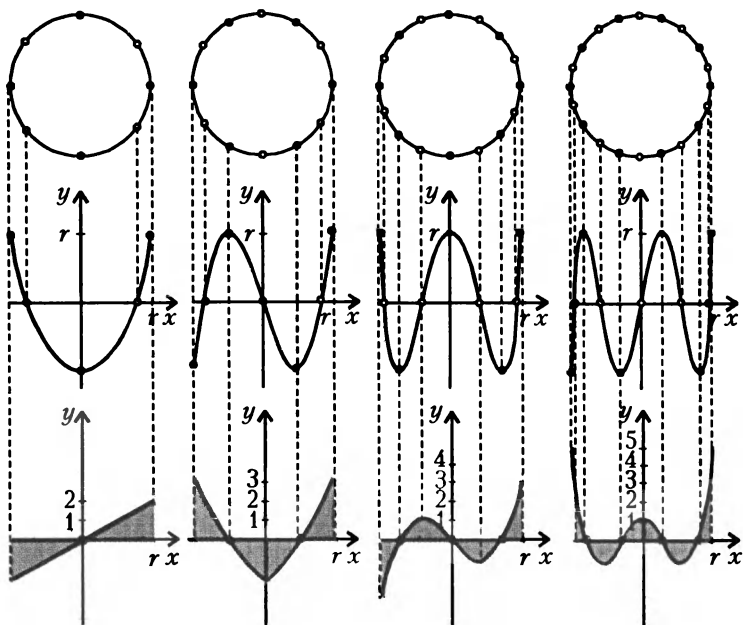


Рис. 1. Если прозрачный лист бумаги $0 \leq x \leq 2\pi$, $-r \leq y \leq r$ с нарисованным на нем графиком $y = r \cos nx$ скрутить в цилиндр (диаметра и высоты $2r$) и посмотреть на него сбоку так, чтобы графики на передней и задней половинках совместились, мы увидим график n -го многочлена Чебышева первого рода. Эти графики при $n = 2, 3, 4, 5$ изображены в верхнем ряду (при выборе масштаба $r = 1$ получаются графики $y = T_n(x)$, при $r = 2$ — графики $y = Q_n(x)$ — см. упражнение 3). В нижнем ряду под n -м многочленом изображена его производная, деленная на n ; это — $(n - 1)$ -й многочлен Чебышева второго рода; у него все n закрашенных фигурок имеют одинаковую площадь

1°. Значения многочлена T_n во всех точках экстремума и в концах отрезка $[-1; 1]$ одинаковы по модулю. Площадь каждого из $n + 1$ кусочков, ограниченных графиком многочлена $U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x)$, осью Ox и прямыми $x = \pm 1$, одна и та же (рис. 1).

(Подобными свойствами обладают лишь многочлены, полученные из равенств $y = U_n(x)$ и $y = T_n(x)$ линейной заменой переменных x и y .)

Свойство 1° вытекает из основных соотношений

2°. $T_n(\cos \varphi) = \cos n\varphi$, $\sin \varphi \cdot U_{n-1}(\cos \varphi) = \sin n\varphi$.

В дополнение к тригонометрическим формулам 2°, которые определяют значения многочленов T_n и U_n при $|x| \leq 1$, для $|x| >$

> 1 имеются совершенно иные на вид тождества:

$$3^\circ. T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2},$$

$$U_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n+1} + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Корни многочленов T_n и U_n видны из следующей пары тождеств:

$$4^\circ. T_n(x) = 2^{n-1} \left(x - \cos \frac{\pi}{2n}\right) \left(x - \cos \frac{3\pi}{2n}\right) \dots \left(x - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right),$$

$$U_n(x) = 2^n \left(x - \cos \frac{\pi}{n+1}\right) \left(x - \cos \frac{2\pi}{n+1}\right) \dots \left(x - \cos \frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Таким образом, корни и точки экстремума многочлена $T_n(x)$ – проекции вершин правильного $4n$ -угольника с диаметром $[-1; 1]$ на этот диаметр (рис.1).

Ниже мы докажем, наряду с другими, соотношения 2° – 4° и проиллюстрируем на их примере некоторые важные методы алгебраических преобразований.

За определение многочленов Чебышева можно было бы принять любую из написанных выше формул, но нам удобнее положить в основу простое рекуррентное соотношение между ними, которое описано в подписи к таблице 1, и вывести из него все формулы.

Ниже мы предпочитаем иметь дело с многочленами, получающимися из T_n и U_n изменением масштаба (см. рис.1): $P_n(x) = U_n(x/2)$, $Q_n(x) = 2T_n(x/2)$; ту роль, которую для T_n и U_n играет отрезок $[-1; 1]$, будет играть теперь отрезок $[-2; 2]$. Новые многочлены хороши тем, что имеют целые коэффициенты, а их старшие коэффициенты равны 1. (Разумеется, формулы перехода, переписанные в «обратном» виде: $P_n(2x) = U_n(x)$, $Q_n(2x) = 2T_n(x)$, – позволяют в любой момент вернуться к многочленам U_n и T_n .) Как правило, мы будем, доказывая что-то для P_n , предлагать аналогичные свойства Q_n читателю в качестве упражнений. Призываем его вооружиться карандашом и бумагой и проделывать подробно все выкладки, причем сначала – для конкретных небольших значений $n = 2, 3, 4, \dots$ (пока все не станет ясным).

Рекуррентные соотношения и индукция

Положим $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ и

$$P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x). \quad (1)$$

Выпишем несколько первых членов этой последовательности. Вслед за $P_0(x) = 1$ и $P_1(x) = x$ идут

$$P_2(x) = x^2 - 1,$$

$$P_3(x) = x(x^2 - 1) - x = x^3 - 2x,$$

$$P_4(x) = x(x^3 - 2x) - (x^2 - 1) = x^4 - 3x^2 + 1,$$

$$P_5(x) = x(x^4 - 3x^2 + 1) - (x^3 - 2x) = x^5 - 4x^3 + 3x$$

и т.д. (для многочленов до P_{12} вы можете проверить результаты по таблице 2).

Многочлены $P_n(x)$ возникают в разных ситуациях. Рассмотрим, например, дроби

$$R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x - \frac{1}{x}, \quad R_3(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}},$$

$$R_4(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}, \quad R_5(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}}, \dots$$

Подобные «многоэтажные» (так называемые *цепные*) дроби – полезный инструмент для различных задач о приближениях чисел и функций; ими, кстати говоря, тоже занимался П.Л.Чебышев.

После преобразований получается

$$R_2(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, \quad R_3(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1},$$

$$R_4(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 - 2x}, \quad R_5(x) = \frac{x^5 - 4x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 1}, \dots$$

(проверьте!). Мы видим, что числители и знаменатели в стандартной записи этих дробей – как раз многочлены $P_n(x)$.

Другой пример: рассмотрим функцию $\sin n\varphi$ и постараемся выразить ее через $\sin \varphi$ и многочлен от $\cos \varphi$:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = \sin \varphi \cdot (4 \cos^2 \varphi - 1),$$

$$\sin 4\varphi = \sin \varphi (8 \cos^3 \varphi - 4 \cos \varphi)$$

Таблица 2. Треугольник Паскаля. О свойствах биномиальных коэффициентов, составляющих этот треугольник, подробно рассказано в брошюре [7]. Числа, стоящие на n -й диагонали, взятые с чередующимися знаками, – коэффициенты многочленов $P_n(x)$; про их сумму – со знаками и без – см. упражнения 6, а) и 8, а).

k	0	1	2	3	4	5	6
n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	36	84	126	126	126	84
10	1	10	45	120	210	252	210
11	1	11	55	165	330	462	462
12	1	12	66	220	495	792	924

(проверьте!). Оказывается, $\sin n\varphi = \sin \varphi \cdot P_{n-1}(2 \cos \varphi)$ для всех $n \geq 1$; другими словами, при $\sin \varphi \neq 0$

$$P_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Полученные соотношения нетрудно получить с помощью метода математической индукции и формулы (1). Действительно, $R_{n+1}(x) = x - \frac{1}{R_n(x)}$. Поэтому, если предположить, что для некоторого n

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)},$$

то из соотношения (1) легко получить аналогичное равенство для n , увеличенного на 1:

$$R_{n+1}(x) = x - \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{xP_n(x) - P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)},$$

что и требуется.

Аналогично для синусов: если предположить, что при $k = n - 1$ и $k = n$

$$\sin(k+1)\varphi = \sin \varphi \cdot P_k(2 \cos \varphi),$$

то из (1) следует

$$\begin{aligned}\sin \varphi \cdot P_{n+1}(2 \cos \varphi) &= 2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot P_n(2 \cos \varphi) - \sin \varphi \cdot P_{n-1}(2 \cos \varphi) = \\ &= 2 \cos \varphi \cdot \sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi = \sin(n+2)\varphi;\end{aligned}$$

мы воспользовались тождеством $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)$.

(Заметим, что мы провели индуктивный переход не от n к $n+1$, как обычно, а от $n-1$ и n к $n+1$; при этом необходимо отдельно проверить первые два равенства при $n=0$ и $n=1$.)

Упражнения

1. Докажите с помощью индукции и рекуррентного соотношения (1), что при $|x| > 2$ справедливо тождество

$$P_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)^{n+1} - \left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{x^2 - 4}}. \quad (3)$$

(Мы еще к нему вернемся.)

2. Докажите, что а) $P_n(2) = n+1$, б) $P_n(-2) = (-1)^n \cdot (n+1)$. (Сделайте это тремя способами: с помощью (1), а также переходя к пределу в равенстве (2) при $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \pi$ и в равенстве (3) — при $x \rightarrow \pm 2$.)

3. Рассмотрим последовательность многочленов $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ..., удовлетворяющую соотношению (1) и начальным условиям $Q_0(x) = 2$, $Q_1(x) = x$. Выпишите первые 6 многочленов $Q_n(x)$. Докажите тождества

$$\text{а) } Q_n(x)/Q_{n-1}(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{2}{x}}}} \quad (n-1 \text{ минус});$$

$$\text{б) } 2 \cos n\varphi = Q_n(2 \cos \varphi);$$

$$\text{в) при } |x| > 2$$

$$Q_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)^n}{2^n}.$$

4. Докажите, что любая последовательность многочленов $R_0(x)$, $R_1(x)$, ..., удовлетворяющая соотношению (1), выражается через последовательность $(P_n(x))$ по формуле

$$R_n(x) = R_1(x) \cdot P_{n-1}(x) - R_0(x) \cdot P_{n-2}(x).$$

В частности, $Q_n(x) = xP_{n-1}(x) - 2P_{n-2}(x) = P_n(x) - P_{n-2}(x)$. Выведите отсюда все тождества из упражнения 3.

Корни многочленов и произведения

Многие интересные формулы, в которых участвуют симметричные выражения от n чисел (или букв), оказываются легко объяснимыми, если эти числа рассматривать как корни некоторого многочлена степени n . Для n чисел $\gamma_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ (где $k =$

$= 1, 2, \dots, n$) таким многочленом служит наш $P_n(x)$. В самом деле,

подставляя в (2) вместо φ значения $\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \dots, \frac{n\pi}{n+1}$, мы

видим, что числа $\gamma_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ — корни многочлена $P_n(x)$. Тут

нам понадобится следствие из *теоремы Безу*²: если γ — корень

многочлена $F(x)$, то $F(x)$ делится на $x - \gamma$. (В самом деле,

заменив переменную x на $y = x - \gamma$, мы получим многочлен $\tilde{F}(y) =$

$= F(x - \gamma)$, у которого есть корень $y = 0$, а такой многочлен, очевидно, делится на y .) Наш многочлен $P_n(x)$ должен делиться

на каждый из двучленов $x - \gamma_k$, а значит — и на их произведение; поскольку он имеет степень n и старший коэффициент 1, он

просто равен произведению $\prod_{1 \leq k \leq n} (x - \gamma_k)$. Итак,

$$P_n(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \left(x - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \right). \quad (4)$$

Упражнение 5. а) Докажите тождество

$$Q_n(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \left(x - 2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right). \quad (4')$$

б) Проверьте его и тождество (4) для $n = 2, 3, 4$ и 5.

Приведем одно любопытное тождество, которое вытекает из сопоставления формул (4) и (2).

Вычислим двумя способами $P_{2m}(0)$ при $m > 0$ и приравняем полученные выражения.

² Подробнее о теореме Безу и разложении на множители многочленов см. [2].

С одной стороны, из (2) получаем

$$P_{2m}(0) = P_{2m}\left(2 \cos \frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin \frac{(2m+1)\pi}{2}\right) / \sin \frac{\pi}{2} = \\ = \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m.$$

С другой стороны, согласно (4),

$$P_{2m}(0) = \prod_{1 \leq k \leq 2m} \left(-2 \cos \frac{k\pi}{2m+1}\right).$$

Заменяя каждое $\cos \frac{k\pi}{2m+1}$ при $m+1 \leq k \leq 2m$ на $\left(-\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$, получим

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \cdot \left[2^m \cdot \prod_{1 \leq k \leq m} \cos \frac{k\pi}{2m+1}\right]^2.$$

Но выражение в квадратных скобках положительно, поскольку в произведение входят косинусы только острых углов; поэтому оно равно 1, т.е.

$$\prod_{1 \leq k \leq m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}. \quad (5)$$

Приведем красивую «словесную» формулировку (5): *при $m > 0$ среднее геометрическое косинусов острых углов, кратных*

$$\frac{\pi}{2m+1}, \text{ равно } \frac{1}{2}.$$

Упражнения

6. а) Найдите $P_n(1)$, $P_n(-1)$, $Q_n(1)$, $Q_n(-1)$,

Докажите похожие на (5) равенства:

б) $\prod_{1 \leq k \leq m} \sin \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}} \quad (m \geq 1);$

в) $\prod_{1 \leq k \leq m} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2m+1} = \sqrt{2m+1} \quad (m \geq 1);$

г) $\prod_{1 \leq k \leq m} \cos \frac{(2k-1)\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m} \quad (m \geq 1).$

7. Выясните, при каких m и n

- а) многочлен P_n делится на P_m ;
 б) многочлен Q_n делится на Q_m .

Производящие функции, степенные ряды и коэффициенты

В этом разделе мы познакомим вас с очень плодотворным методом, широко применяемым в самых различных разделах математики – анализе, комбинаторике, теории вероятностей, – с *методом производящих функций*. Этот метод позволяет иногда собрать отдельные члены последовательности, как «кирпичи», в одно целостное «здание» и получить информацию сразу обо всей последовательности.

Пусть нам дана последовательность a_0, a_1, a_2, \dots . Назовем ее *производящей функцией* выражение

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Такие выражения математики называют *формальными степенными рядами*. Эти ряды можно складывать, вычитать и перемножать как обычные многочлены, можно делить один ряд на другой (если свободный член ряда-делителя отличен от 0), любой ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать – и все эти операции можно использовать, чтобы получить новые последовательности из уже изученных. Часто оказывается возможным из рекуррентного соотношения, которым определена последовательность, найти простую формулу для ее производящей функции, и наоборот – из производящей функции извлечь формулу или соотношения для членов последовательности.

Для конечной последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ производящей функцией будет многочлен $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$. Например, многочлен $f_n(z) = (1+z)^n$ служит производящей функцией для *биномиальных коэффициентов* $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ – членов n -й строки треугольника Паскаля (таблица 2):

$$\sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k z^k = (1+z)^n. \quad (6)$$

Продифференцировав это тождество k раз и положив затем $z = 0$, найдем $C_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)/1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$.

Раскрывая скобки и выделяя коэффициенты при z^m в очевидном тождестве $(1+z)(1+z)^n = (1+z)^{n+1}$, записанном в виде

$$(1+z) \left(\sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k z^k \right) = \sum_{0 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k z^k,$$

получим важное соотношение

$$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m.$$

Среди бесконечных последовательностей особенно простую, легко «сворачивающуюся» производящую функцию имеет геометрическая прогрессия $b_0 = b$, $b_n = qb_{n-1}$. Заменяя в сумме $f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = b + \sum_{n \geq 1} b_n z^n$ каждое b_n на qb_{n-1} , получим $f(z) = b + qz \sum_{n \geq 1} b_{n-1} z^{n-1} = b + qzf(z)$, откуда $f(z)(1 - qz) = b$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \frac{b}{1 - qz}. \quad (7)$$

Это, конечно, известная формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии (при $|qz| < 1$). Но тем же приемом можно получить и производящую функцию для нашей последовательности многочленов $P_n(x)$.

Положим $\Phi(z) = \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n = 1 + xz + \sum_{n \geq 2} P_n(x) z^n$. (Здесь x играет роль параметра и ниже мы для краткости вместо $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$, ... будем писать P_n , P_{n-1} , ...) Согласно (1), заменим каждое P_n при $n \geq 2$ на $xP_{n-1} - P_{n-2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 1 + xz + \sum_{n \geq 2} xP_{n-1} z^n - \sum_{n \geq 2} P_{n-2} z^n = \\ &= 1 + xz + xz \cdot \sum_{n \geq 2} P_{n-1} z^{n-1} - z^2 \sum_{n \geq 2} P_{n-2} z^{n-2} = \\ &= 1 + xz + xz(\Phi(z) - 1) - z^2 \Phi(z). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(z) \cdot (z^2 - xz + 1) = 1$ и

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2 - xz + 1}. \quad (8)$$

В этой простой формуле скрыта вся хитрая последовательность многочленов P_n , которой мы до сих пор занимались! Отдельные P_n , спрятанные в ней, мы «вытащим» двумя разными способами.

1) При $|x| > 2$ квадратное уравнение $z^2 - xz + 1 = 0$ имеет два корня:

$$u = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \quad v = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}. \quad (9)$$

Из $z^2 - xz + 1 = (z - u)(z - v)$, учитывая $uv = 1$, получим

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{(u-z)(v-z)} = \left(\frac{1}{v-z} - \frac{1}{u-z} \right) \frac{1}{u-v} = \\ &= \left(\frac{u}{1-zu} - \frac{v}{1-zv} \right) \frac{1}{u-v} = \sum_{n \geq 0} \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{u-v} z^n,\end{aligned}$$

т.е. $P_n(x) = (u^{n+1} - v^{n+1})/(u-v)$; это формула (3).

2) Найдем из (8) отдельные коэффициенты каждого члена $P_n(x)$. Делается это так:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{1 - (xz - z^2)} = \sum_{k \geq 0} (xz - z^2)^k = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j C_k^j x^{k-j} z^{k+j} \right) = \\ &= \sum_{n \geq 0} z^n \left(\sum_j (-1)^j C_{n-j}^j \cdot x^{n-2j} \right)\end{aligned}$$

(мы воспользовались формулами суммы бесконечной геометрической прогрессии (7), бинорма Ньютона (6) и выделили коэффициент при z^n , который и есть нужный нам $P_n(x)$). Следовательно,

$$P_n(x) = \sum_j (-1)^j C_{n-j}^j x^{n-2j} \quad (10)$$

(например: $P_6(x) = C_6^0 x^6 - C_5^1 x^4 + C_4^2 x^2 - C_3^3 = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$).

Конечно, доказать готовые формулы (3) и (10) можно без производящих функций; самое замечательное – как они возникли: почти сами собой, из короткой формулы (8).

Обоснование всех действий с бесконечными рядами, которые мы производили – а оно, разумеется, необходимо, – можно было бы провести, либо заметив, что при небольших по модулю числовых значениях z все рассматриваемые ряды *сходятся* (как (7) при $|z| < < 1/|q|$), т.е. представляют настоящие функции от z , либо проверив, что для определенных формально операций сложения, умножения и т.д. (каждый коэффициент ряда выражается через конечное число других, а z – просто буква!) выполнены все обычные законы. Подробнее с методом производящих функций и степенными рядами можно познакомиться по книгам [3], [4], [6].

8. Рассмотрим последовательность чисел *Фибоначчи*

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

а) Докажите, что ее производящая функция равна $\frac{z}{1-z-z^2}$. Выведите отсюда

б) формулу Бинэ

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

(другой вывод этой формулы см. в [5]).

в) Докажите тождество $u_n = \sum_j C_{n-j-1}^j$.

9. а) Найдите производящую функцию для последовательности многочленов $Q_n(x)$ из упражнения 3 и докажите с ее помощью, что (при $|x| > 2$)

$$Q_n(x) = u^n - v^n,$$

где u и v определены формулами (9) (в этом заключалось упражнение 3, в)).

б) (Для тех, кто знаком с комплексными числами; см. [1]). Проверьте, что формулы (3) и (3') при $|x| < 2$ превращаются в формулы (2) и (2'). (Указание. $u = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $v = \cos \varphi - i \sin \varphi$, если $x = 2 \cos \varphi$.)

Литература

1. А.М.Яглом и И.М.Яглом. *Неэлементарные задачи в элементарном изложении*. «Библиотека математического кружка», выпуск 5. — М.: Гостехтеориздат, 1954; задачи 130—134.

2. *Избранные вопросы математики* (факультативный курс 10), раздел «Комплексные числа и многочлены». — М.: «Просвещение», 1980.

3. Д.Пойа, Г.Сеге. *Задачи и теоремы из анализа*. — М.: Наука, 1978.

4. Анри Картан. *Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных*. — М.: ИЛ, 1963.

5. Н.Н.Воробьев. *Числа Фибоначчи*. «Популярные лекции по математике», выпуск 6. — М.: Наука, 1978.

6. Н.Я.Виленкин. *Комбинаторика*. — М.: Наука, 1969.

7. В.А.Успенский. *Треугольник Паскаля*. «Популярные лекции по математике», выпуск 43. — М.: Наука, 1979.

ПАРЫ ЧИСЕЛ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Уравнение $ax - by = c$ в целых числах

Рассмотрим уравнение

$$8x - 5y = 19.$$

На примере этого уравнения мы продемонстрируем метод решения в целых числах линейных уравнений вида $ax - by = c$ с целыми a , b и c .

Поскольку $8 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 19$, пара чисел $x = 3$, $y = 1$ является решением исходного уравнения. Это решение мы нашли простым подбором.

Покажем теперь, как, имея одно решение, можно записать все остальные решения (их бесконечно много). Вычитая из уравнения $8x - 5y = 19$ равенство $8 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 19$, получаем $8(x - 3) - 5(y - 1) = 0$, или $x - 3 = 5(y - 1)/8$. Из последнего равенства видно, что число $x - 3$ будет целым тогда и только тогда, когда $y - 1$ делится на 8, т.е. $y - 1 = 8n$, где n — какое-нибудь целое число. Подставляя $y - 1 = 8n$ в числитель дроби $5(y - 1)/8$ и сокращая ее на 8, получаем $x - 3 = 5n$.

Тем самым, все целые решения исходного уравнения можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x = 3 + 5n, \\ y = 1 + 8n, \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix};$$

здесь n — любое целое число.

Второй вид записи будет подробно объяснен в следующем пункте, а сейчас заметим, что тем же методом получается формула для всех целых решений любого уравнения $ax - by = c$ (где a и b — взаимно простые числа):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \quad (*)$$

где $(x_0; y_0)$ — какое-нибудь одно его целое решение.

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером.

Для решения предложенных ниже задач надо иметь в виду следующие обстоятельства. Если целые числа a и b имеют общие делители (кроме 1 и -1), то надо разделить все члены уравнения на их наибольший общий делитель. В случае, когда c не делится на него, уравнение, очевидно, не имеет целых решений, а в случае, когда делится, такие решения существуют – надо только подобрать одно какое-нибудь решение и записать по формуле $(*)$ все остальные.

Для любых чисел a и b имеется общий метод нахождения одного решения уравнения: этот метод основан на алгоритме Евклида (см. [1] и [5]).

Упражнения

1. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах:

а) $7x - 5y = 0$; б) $7x - 5y = 1$; в) $15x - 9y = 6$; г) $39x - 63y = 47$?

Если уравнение имеет решения, то укажите одно из них и запишите по общей формуле все его решения.

2. Сколько решений в натуральных (целых положительных) числах x, y имеют уравнения:

а) $19x + 85y = 1985$; б) $7x + 5y = 99$?

3*. Автомат делает на ленте длиной 2 м синие пометки от ее начала через каждые 7 см и красные пометки тоже от ее начала через каждые 5 см. Сколько раз синяя и красная пометки окажутся на расстоянии 1 см друг от друга?

Пары чисел

Если решения уравнения с одним переменным x представляют собой отдельные числа, то решения уравнения с двумя переменными x и y – это уже пары чисел. В предыдущем пункте мы показали, как из одного целого решения уравнения $ax - by = c$ получать все остальные решения: надо к одному его решению – паре чисел $(x_0; y_0)$ – прибавить пару чисел $(b; a)$, умноженную на какое-нибудь целое число. Сейчас мы придадим точный смысл сложению пар чисел и умножению их на числа.

Для большей наглядности нам удобно пары чисел $(x; y)$ записывать в виде *столбиков* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; а сами числа x и y мы будем называть соответственно первой и второй *компонентами* данной

пары (столбика). (Не надо путать столбик $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ с дробью $\frac{x}{y}$!)

Два столбика считаются *равными* тогда и только тогда, когда равны их компоненты:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ только если } \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Сложить два столбика – это значит сложить их компоненты:

$$\text{пусть } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ тогда } u + v = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Так как от перемены мест слагаемых сумма чисел не меняется: $a + b = b + a$, то же самое можно сказать и про столбики: $u + v = v + u$. Для столбиков верно также правило $(u + v) + w = u + (v + w)$.

Умножить столбик u на число k – это значит умножить на k обе его компоненты:

$$\text{если } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ то } ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Особую роль, подобную той, которую для чисел играет число 0, для столбиков играет нулевой столбик $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Если это не приводит к путанице, то его обозначают тоже через «0». Для всякого столбика u верно равенство $u + 0 = u$.

Казалось бы, столь же естественно ввести умножение столбиков:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Для такого умножения выполнены все те же свойства, что и для умножения чисел: 1) $uv = vu$, 2) $u(vw) = (uv)w$, 3) $(u + v)w = uw + vw$. Роль «единицы» играет столбик $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Но в отличие от чисел, здесь не всегда возможно деление на ненулевой столбик. Например, если $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то не существует столбика v такого, что $uv = e$.

В конце статьи мы познакомимся с другим, как оказывается, тоже естественным и более содержательным правилом умножения пар чисел:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Это правило замечательно тем, что для него обратная операция – деление на ненулевой столбик – всегда возможна.

Пара чисел $(x; y)$, записанная не в виде столбика, а в виде строчки, используется обычно для обозначения координат точки

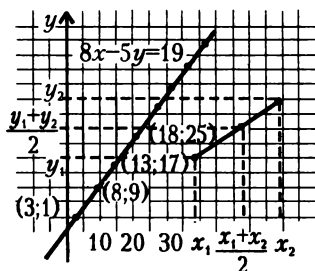


Рис. 1

на координатной плоскости Oxy . Метод координат позволяет связать алгебру с геометрией. Так, например, уравнение $ax - by = c$ соответствует прямой на координатной плоскости, а целые решения этого уравнения – точкам с целыми координатами (рис.1). С помощью правил сложения пар чисел и умножения их на число можно записывать формулы для

координат точек; например, если $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ – две точки, то точка

$$C = \frac{1}{2}((x_1; y_1) + (x_2; y_2)) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

– середина отрезка AB .

Упражнения

4. Даны столбики

$$u = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите столбики: а) $2u$; б) $2u - v$; в) $u + 2v - 3w$.

5. Найдите числа x и y , удовлетворяющие равенству

$$x \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Сравните результат с 4, в).

6. а) Пусть даны точки $A = (7; -1)$ и $B = (-2; 5)$. Найдите координаты такой точки $C = (x; y)$, что B – середина отрезка AC . б) Найдите координаты точек D и E , которые делят отрезок AB на три равные части.

Уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ в целых числах

В первом пункте мы показали, как, исходя из одного решения уравнения $ax - by = c$, получать и записывать бесконечную серию его решений. Подобный результат мы получим и для уравнения $x^2 - dy^2 = 1$, где d – натуральное число, не являющееся полным квадратом. Но для этого потребуются свой, более сложный метод. Мы продемонстрируем его на примере уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Это уравнение имеет очевидные решения $(1; 0)$ и $(-1; 0)$. Ясно,

что если $(x; y)$ – решение уравнения, то $(-x; y)$, $(x; -y)$ и $(-x; -y)$ – тоже решения. Поэтому можно ограничиться поиском только положительных (натуральных) решений. Вот два таких решения: $(3; 2)$, $(17; 12)$ – дальше в их поисках продвинуться трудно.

Неожиданную помощь здесь оказывает иррациональное число $\sqrt{2}$. Пользуясь тождеством $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, разложим левую часть уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ на множители

$$(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$$

и подставим сюда наше первое решение в натуральных числах $x = 3$, $y = 2$:

$$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1. \quad (2)$$

Оказывается, что второе решение можно получить, если пользуясь тождеством $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, возвести в квадрат число $3 + 2\sqrt{2}$ (или $3 - 2\sqrt{2}$):

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2},$$

$$(3 - 2\sqrt{2})^2 = 9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2}.$$

Пара $(17; 12)$ является вторым решением. Проверим это следующим образом. Возведем обе части верного равенства (2) в квадрат:

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 (3 - 2\sqrt{2})^2 = 1$$

и получим

$$(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) = 1, \text{ или } 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1.$$

Следующее новое решение можно получить, возведя число $3 + 2\sqrt{2}$ в куб:

$$(3 + 2\sqrt{2})^3 = (3 + 2\sqrt{2})^2 (3 + 2\sqrt{2}) = 99 + 70\sqrt{2}.$$

Совершенно аналогично получим $(3 - 2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}.$

Поскольку $(3 + 2\sqrt{2})^3 (3 - 2\sqrt{2})^3 = 1$, имеем

$$(99 + 70\sqrt{2})(99 - 70\sqrt{2}) = 99^2 - 70^2 \cdot 2 = 1,$$

т.е. $(99; 70)$ – тоже решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$.

Теперь, наверное, уже ясен способ получения новых решений — надо и дальше возводить $3 + 2\sqrt{2}$ в степень, т.е. если

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2},$$

где x_n и y_n — натуральные числа, то пара $(x_n; y_n)$ является решением уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Можно доказать, что этот способ дает все его решения в натуральных числах.

Рассмотрим теперь более общее уравнение такого вида:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где d — натуральное число, не являющееся полным квадратом.

Оказывается, что все его решения в натуральных числах получаются таким же методом. Надо угадать самое меньшее его решение $(x_0; y_0)$ и возвести число $x_0 + y_0\sqrt{d}$ в степень n :

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}.$$

(Самым меньшим решением называется такое решение $(x_0; y_0)$, что для любого другого решения $(x; y)$ выполняется неравенство $x_0 + y_0\sqrt{d} < x + y\sqrt{d}$.)

Для любых чисел d имеется общий метод нахождения наименьшего натурального решения, основанный на разложении чисел в цепные дроби (см. [1] и [2]).

Упражнения

7•. Найдите четыре решения в натуральных числах уравнения:
а) $x^2 - 3y^2 = 1$; б) $x^2 - 5y^2 = 1$; в) $x^2 - 2y^2 = -1$.

8•. Докажите, что

$$x_n = \frac{1}{2} \left((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n \right),$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n \right)$$

— целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2 - 2y^2 = 1$, а) для $n = 1, 2, 3$; б) для любого натурального n .

9. Найдите все целые решения уравнения $x^2 - 4y^2 = 13$.

10•. Докажите, что уравнение $x^2 - 3y^2 = -1$ не имеет решений в целых числах.

Числа вида $p + q\sqrt{2}$

Обратим внимание на то интересное обстоятельство, что числу вида $p + q\sqrt{2}$ с рациональными p и q можно естественно сопоставить пару чисел $(p; q)$. При этом равенство двух чисел $p_1 + q_1\sqrt{2} = p_2 + q_2\sqrt{2}$ имеет

место в том и только том случае, когда $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$. В самом деле, пусть $p_1 + q_1\sqrt{2} = p_2 + q_2\sqrt{2}$ и $q_1 \neq q_2$; тогда получится, что $\sqrt{2}$ равняется рациональному числу $(p_1 - p_2)/(q_2 - q_1)$, а это неверно. Следовательно, должно выполняться равенство $q_1 = q_2$; но тогда из равенства $p_1 + q_1\sqrt{2} = p_2 + q_2\sqrt{2}$ сразу получаем, что $p_1 = p_2$.

Правило сложения чисел $p_1 + q_1\sqrt{2}$ и $p_2 + q_2\sqrt{2}$ такое же, как для столбиков:

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ q_1 + q_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь перемножим числа $p_1 + q_1\sqrt{2}$ и $p_2 + q_2\sqrt{2}$:

$$(p_1 + q_1\sqrt{2})(p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1p_2 + 2q_1q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{2}.$$

В результате мы приходим к числу такого же вида и получаем новое правило умножения для столбиков с рациональными компонентами p_1, q_1, p_2, q_2 :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1p_2 + 2q_1q_2 \\ p_1q_2 + p_2q_1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Если следовать такому правилу, то можно записать решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ так: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}^n$ (возвести столбик в степень n — значит умножить столбик n раз на себя).

Для правила (3) выполнены обычные свойства умножения; роль единицы здесь играет столбик $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как он соответствует числу $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.

Оперировать с числами $p + q\sqrt{2}$ очень помогает интересная симметрия в множестве таких чисел: каждому числу $\alpha = p + q\sqrt{2}$ соответствует число $\bar{\alpha} = p - q\sqrt{2}$, которое называется *сопряженным* к α . (Для столбиков переход к сопряженному означает просто изменение знака у второй компоненты.)

Для операции сопряжения выполнены такие свойства:

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha.$$

Но самое важное — это то, что произведение сопряженных чисел $(p + q\sqrt{2})(p - q\sqrt{2}) = p^2 - 2q^2$ уже не содержит $\sqrt{2}$; $\alpha\bar{\alpha}$ — рациональное число. Это позволяет делить числа вида $p + q\sqrt{2}$ друг на друга,

получая при этом число такого же вида. Чтобы разделить β на α , достаточно умножить β на $\bar{\alpha}$ и разделить результат на $\alpha\bar{\alpha}$.

Мы уже пользовались парами сопряженных чисел при решении уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Левую часть $x^2 - 2y^2$ мы представили как произведение двух сопряженных чисел

$$\alpha = x + y\sqrt{2}, \quad \bar{\alpha} = x - y\sqrt{2}.$$

Возьмем теперь два числа $\alpha = x_1 + y_1\sqrt{2}$ и $\beta = x_2 + y_2\sqrt{2}$ и сопряженные к ним $\bar{\alpha} = x_1 - y_1\sqrt{2}$ и $\bar{\beta} = x_2 - y_2\sqrt{2}$. Рассмотрим произведение $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$. Производя вычисления в определенном порядке — сначала $\alpha\bar{\alpha}$, потом $\beta\bar{\beta}$ и затем $(\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})$ — получаем

$$\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = (x_1^2 - 2y_1^2)(x_2^2 - 2y_2^2). \quad (4)$$

Если вычисление того же произведения $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$ произвести в другом порядке, то мы получим

$$\alpha\beta = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2},$$

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = (x_1x_2 + 2y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2},$$

$$\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = (x_1x_2 + 2y_1y_2)^2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)^2. \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) получаем тождество

$$(x_1^2 - 2y_1^2)(x_2^2 - 2y_2^2) = (x_1x_2 + 2y_1y_2)^2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)^2. \quad (6)$$

Из этого тождества следует интересная связь между целыми решениями уравнений более общего вида $x^2 - 2y^2 = c$.

Если для пары чисел $(x_1; y_1)$ выполнено равенство $x_1^2 - 2y_1^2 = c_1$, а для пары целых чисел $(x_2; y_2)$ выполнено равенство $x_2^2 - 2y_2^2 = c_2$, то пара целых чисел $(x_1x_2 + 2y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$ является решением уравнения $x^2 - 2y^2 = c_1c_2$.

Все сказанное про числа вида $a + b\sqrt{2}$ верно и для чисел вида $a + b\sqrt{d}$, где d — простое число (или натуральное, не делящееся на квадрат). В частности, правило умножения для любого d будет таким:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + dy_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тождество (6) будет выглядеть так:

$$(x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = (x_1x_2 + dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 + x_2y_1)^2. \quad (8)$$

Замечательно, что это тождество выполнено вообще для всех чисел x_1, y_1, x_2, y_2, d — это можно непосредственно проверить, раскрыв

скобки. В частности, оно верно и при $d = -1$; получающееся при этом тождество будет играть центральную роль в следующем пункте.

Упражнения

11. Перемножьте числа

$$(2 - \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}).$$

12. Разделите числа, избавившись от иррациональности в знаменателе:

$$а) \frac{9 + 4\sqrt{5}}{9 - 4\sqrt{5}}; \quad б) \frac{p_1 + q_1\sqrt{d}}{p_2 + q_2\sqrt{d}}.$$

13*. Докажите, что произведение чисел вида $x^2 + 5y^2$, где x и y — целые числа, есть снова число того же вида. Найдите все такие числа меньшие 100.

Замечательное тождество и композиция Виета

Любые две пары чисел $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ связаны таким тождеством, известным еще Диофанту:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2. \quad (9)$$

Оно получается из тождества (8) при $d = -1$ и часто используется в алгебре и теории чисел. Мы расскажем здесь о другом его применении: интересном способе, позволяющем получать из двух прямоугольных треугольников новый прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной произведению их гипотенуз.

Возьмем один прямоугольный треугольник с катетами a_1, b_1 и гипотенузой c_1 и другой — с катетами a_2, b_2 и гипотенузой c_2 . Поскольку по теореме Пифагора

$$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2, \quad a_2^2 + b_2^2 = c_2^2,$$

тождество (9) можно записать так:

$$(c_1c_2)^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2.$$

Из этого равенства видно, что существует прямоугольный треугольник с катетами $|a_1a_2 - b_1b_2|, a_1b_2 + a_2b_1$ и гипотенузой c_1c_2 . По-видимому, это впервые заметил в XVI веке французский математик Франсуа Виет (см. [7]), поэтому назовем такой способ получения из двух прямоугольных треугольников нового прямоугольного треугольника *композицией Виета*.

Рассмотрим два одинаковых прямоугольных треугольника с катетами m, n и положим в тождестве (9) $a_1 = a_2 = n, b_1 = b_2 =$

= m . Получим

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2.$$

Мы видим, что композиция Виета дает новый прямоугольный треугольник с катетами $|m^2 - n^2|$, $2mn$ и гипотенузой $m^2 + n^2$. Интересно, что все прямоугольные треугольники с целыми (взаимно простыми) сторонами a , b , c – так называемые пифагоровы тройки – могут быть получены по этим формулам

$$c = m^2 + n^2, \quad a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad (10)$$

где m и n – (взаимно простые) натуральные числа разной четности, $m > n$.

Самое же неожиданное заключается в том, что при композиции Виета двух прямоугольных треугольников получается новый прямоугольный треугольник (рис.2), у которого угол против катета $a_1b_2 + a_2b_1$ равен сумме $\varphi + \psi$ углов φ и ψ исходных треугольников против катетов b_1 и b_2 (если $\varphi + \psi < 90^\circ$; если

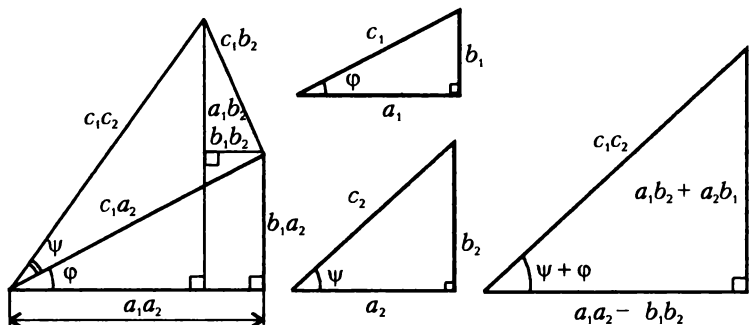


Рис. 2

же $\varphi + \psi > 90^\circ$, то этот угол равен $180^\circ - (\varphi + \psi)$). Таким образом, композицию Виета можно задать чисто геометрически. Композицией Виета двух прямоугольных треугольников является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной произведению гипотенуз, и углом, равным сумме соответствующих углов взятых треугольников.

Упражнения

14. На клинописной табличке, изготовленной в древнем Вавилоне примерно 1500 лет до н. э., среди других пифагоровых треугольников указан такой: 4961, 6480, 8161. Каким m и n в формулах (10) он соответствует?

15*. Найдите $\cos 75^\circ$, используя композицию Виета для двух прямоугольных треугольников с углами 30° и 45° .

16. В пифагоровых треугольниках со сторонами 5, 12, 13 и 7, 24, 25 гипотенуза на 1 больше одного из катетов.

а) Найдите еще два таких пифагоровых треугольника.

б) Найдите общую формулу для сторон таких треугольников.

в)* Укажите среди них треугольники, у которых гипотенуза есть полный квадрат (как у треугольника 7, 24, 25: $25 = 5^2$).

Комплексные числа $a + bi$

В предыдущих пунктах мы с помощью чисел вида $a + b\sqrt{d}$ пришли к тождеству (8), которое оказалось верным при любом d . Затем мы положили в этом тождестве $d = -1$; при этом сами выражения $a + b\sqrt{d} = a + b\sqrt{-1}$ потеряли смысл, так как среди чисел нет $\sqrt{-1}$ — ведь квадрат любого числа является неотрицательным числом. Тем не менее оказывается целесообразным ввести в употребление новое «мнимое» число, квадрат которого равен -1 . Его обозначают буквой i (от латинского слова *imaginaris* — мнимый, воображаемый).

Выражения вида $a + bi$, где a и b — обычные числа, называют *комплексными числами*. Два комплексных числа, по определению, равны тогда и только тогда, когда равны их компоненты: $a_1 + b_1i = a_2 + b_2i$, только если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Сложение и умножение комплексных чисел $a + bi$ производится аналогично тому, как они производились для чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с рациональными a и b . Однако здесь a и b могут быть любыми числами, а $i^2 = -1$. В результате этих операций мы снова получаем выражение вида $a + bi$:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \\ (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.\end{aligned}$$

Мы видим теперь, откуда взялось умножение (1) столбиков, которое мы указали в разделе «Пары чисел». Это умножение по существу уже обсуждалось в предыдущем пункте — как композиция Виета двух прямоугольных треугольников с катетами $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$.

Особую роль играют *нулевое* комплексное число $0 = 0 + 0i$, *единица* $1 = 1 + 0i$ и *мнимая единица* $i = 0 + 1i$. Заметим, что если какая-нибудь компонента a или b комплексного числа $a + bi$ равна нулю, то соответствующую часть комплексного числа при записи опускают.

В мире комплексных чисел можно делить на любое число, отличное от нуля $0 = 0 + 0i$. Вычисляя частное двух чисел, удобно

умножить оба эти числа на сопряженное число $c - di$ к делителю $z = c + di$:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i.$$

Комплексные числа возникли впервые в алгебре, в задачах о решении алгебраических уравнений третьей и более высокой степени. Однако применения комплексных чисел охватывают едва ли не все основные области математики и физики — геометрию, теорию чисел, математический анализ и теорию вероятностей, расчет электрических цепей, гидродинамику и квантовую механику.

Мы получили комплексные числа как пары действительных чисел, определив для них умножение правилом (1), удовлетворяющее естественным условиям — коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности. Для математики интересна задача классификации всех таких правил. Оказывается, все они укладываются в общую схему: пары $(x; y)$ записываются в виде «обобщенных комплексных чисел» $x + yj$ и j^2 в вычислениях заменяется на $r + sj$ (r, s — фиксированные числа, см. упражнение 19); здесь возможны три существенно различных случая (к которым можно свести остальные): (1) $j^2 = 1$ (к этому типу относится подробно изученное нами правило $j^2 = 2$); (2) $j^2 = 0$ (любопытно, что соответствующее правило умножения, записанное для столбиков:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

— это перевернутое правило сложения дробей $\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 x_2 + x_2 y_1}{x_1 x_2}$) и, наконец, (3) $j^2 = -1$ — настоящие комплексные числа.

Упражнения

17. Будем изображать комплексное число $x + iy$ точкой $(x; y)$ на координатной плоскости. Пусть $u = 1 - i$, $v = -2 + 5i$. Найдите а) \bar{u} ; б) \bar{v} ; в) uv ; г) $u\bar{v}$; д) u/v и изобразите все эти числа на координатной плоскости.

18. Пусть $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $w = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Найдите а) z^2, z^4, z^8 ; б) $w^2, w^3, w^6, w^2 + w + 1$.

19*. Пусть r и s — два фиксированных числа. Зададим умножение на парах чисел (всех, а не только рациональных) формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + r y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 + s y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

(Это правило соответствует умножению «обобщенных комплексных чисел» $x + jy$, где $j^2 = r + sj$.)

а) Проверьте, что для этого умножения выполнены основные свойства умножения (1)–(3)).

б) Какая пара e играет роль единицы?

в) При каких r и s для любой пары u , отличной от $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, существует такое v , что $uv = e$?

г) При каких r и s существует такая пара $u \neq 0$, что $u^2 = 0$?

20. Зададим умножение пар чисел $(a; b)$ так: каждой паре чисел $(a; b)$ соответствует линейная функция $u(t) = at + b$, а произведению $(a_1; b_1)$ на $(a_2; b_2)$ соответствует композиция функции $u_1(t) = a_1t + b_1$ и $u_2(t) = a_2t + b_2$, т.е. подстановка первой во вторую $u_2(u_1(t)) = a_2(a_1t + b_1) + b_2 = a_2a_1t + a_2b_1 + b_2$; или

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 \\ a_2b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Какие из следующих законов выполнены для этого умножения: $uv = vu$, $(uv)w = u(vw)$, $u(v + w) = uv + uw$, $(u + v)w = uw + vw$?

Литература

1. Гельфонд А.О. *Решение уравнений в целых числах*. М.: Наука, 1983. – (Популярные лекции по математике, вып.8.)

2. Нестеренко Ю.В., Никишин Е.М. *Очерк о цепных дробях*. – Квант, 1983, №5, 6.

3. Вагутен Н. *Сопряженные числа*. – Квант, 1980, №2.

4. Ашманов С. *Числа и многочлены*. – Квант, 1980, №2.

5. *Заочные математические олимпиады*. – М.: Наука, 1981.

6. Понтрягин Л.С. *Комплексные числа*. – Квант, 1982, №4.

7. Башмакова И.Г. *Становление алгебры*. – М.: Знание, 1979.

ГЕКСАГРАММЫ ПАСКАЛЯ И КУБИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

В 1640 году Блез Паскаль (ему шел тогда семнадцатый год) обнаружил замечательное свойство шестизвенной замкнутой ломаной, вписанной в окружность. В возникающей конфигурации (рис.1), которую Паскаль назвал «мистической гексаграммой» (рис.1), которую Паскаль назвал «мистической гексаграм-

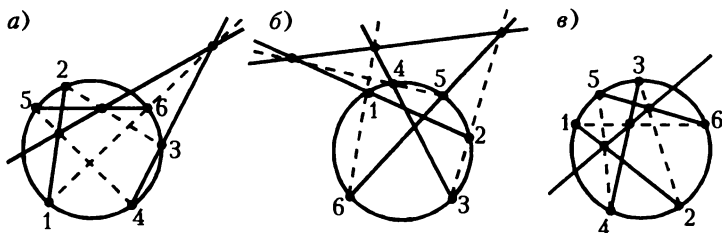


Рис.1. Теорема Паскаля. Какие бы шесть точек ни взять на окружности и как ни занумеровать их числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, точки пересечения прямых 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61 будут лежать на одной прямой (ее называют прямой Паскаля вписанного шестиугольника 123456). Другая формулировка: точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника или их продолжений лежат на одной прямой

мой», некоторые три точки пересечения неизбежно оказываются лежащими на одной прямой. Свое открытие Паскаль опубликовал в виде афиши, изданной в пятидесяти экземплярах для раздачи и пересылки отдельным ученым. Работа Паскаля и вышедшее четырьмя годами раньше небольшое сочинение Жерара Дезарга «Образец одного из общих способов для употребления перспективы» послужили фундаментом новой математической дисциплины – *проективной геометрии*. Именно тогда было осознано, что «древние знали не все» (выражение Пьера Ферма) – до тех пор достижения геометров Древней Греции считались непревзойденными.

С именем одного из последних античных геометров – Паппа Александрийского, жившего в III веке н. э., – связана теорема о шестизвенной ломаной, похожая на теорему Паскаля; с нее мы и начнем рассказ.

Очень советуем провести экспериментальную проверку этих теорем: сделать несколько крупных и аккуратных чертежей – это

не только убедит вас в справедливости теорем, но и позволит понять восторг, охвативший в свое время Паскаля и его современников (а быть может, и Паппа).

На геометрических доказательствах и многочисленных следствиях теорем Паппа и Паскаля мы не будем задерживаться, затронув лишь одну поучительную тему – использование геометрических преобразований, в том числе центрального проектирования. Наша главная цель – показать, что свойства «гексаграмм» – лишь частные проявления более общего факта, относящегося к алгебраической геометрии, одному из самых глубоких разделов математики XIX–XX веков. Мы увидим, что тот же факт объясняет и основное свойство операции «сложения точек» на кубической кривой.

В заключительной серии рисунков точки трех цветов и соединяющие их прямые образуют конфигурации, где удивительные совпадения точек пересечения (которые в конфигурациях Паппа и Паскаля возникают однажды) происходят бесконечное число раз.

Теоремы Паппа

Начнем со сравнительно простой теоремы о шести точках, лежащих на двух прямых a и b (рис.2, а).

Теорема 1,а. Пусть вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат попеременно на двух прямых. Если две пары противоположных звеньев этой ломаной (1-е и 4-е, 2-е и 5-е)

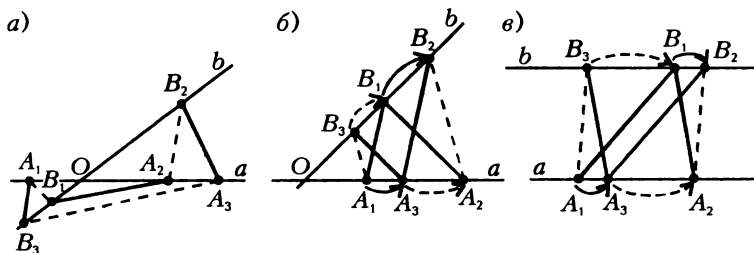


Рис.2. Гексаграммы Паппа. Шесть вершин ломаной $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ лежат попеременно на двух прямых a и b : первые четыре выбираются произвольно, затем A_3 и B_3 строятся так, что $B_2A_3 \parallel A_1B_1$, $A_3B_3 \parallel B_1A_2$; тогда обязательно $B_3A_1 \parallel A_2B_2$ (теорема 1,а). Доказательство: а), б) перемножив равенства $OA_1/OA_3 = OB_1/OB_2$ и $OA_3/OA_2 = OB_3/OB_1$, получим $OA_1/OA_2 = OB_3/OB_1$; в) сложив равенства $A_1\vec{A}_3 = B_1\vec{B}_2$ и $A_3\vec{A}_2 = B_3\vec{B}_1$, получим $A_1\vec{A}_2 = B_3\vec{B}_2$

параллельны, то и оставшаяся пара звеньев (3-е и 6-е) параллельна.

Идею доказательства поясним с помощью геометрических преобразований. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O (рис.2, б). Рассмотрим две гомотетии с центром O : одну – переводящую прямую A_1B_1 в A_3B_2 , и другую – переводящую A_3B_3 в A_2B_1 . Их композиция – результат последовательного выполнения этих гомотетий – переводит прямую A_1B_3 в A_2B_2 , поэтому $A_1B_3 \parallel A_2B_2$. Заметим, что следить за преобразованиями точки A_1 удобно, применяя гомотетии в одном порядке: $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2$, а точки B_3 – в другом: $B_3 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2$. Результат, конечно, не зависит от порядка применения двух гомотетий: их композиция – это тоже гомотетия с центром O , коэффициент которой равен произведению коэффициентов этих двух гомотетий. В случае, когда прямые a и b параллельны (рис.2, в), в том же рассуждении гомотетии нужно заменить параллельными переносами.

Таким образом, теорема 1, а – это просто геометрическое выражение коммутативности умножения (и сложения) чисел; это объясняет важную роль теоремы Паппа в основаниях геометрии (см., например, книгу [5]).

Теорема Паппа о 6 точках – лишь очень специальный случай значительно более глубокой теоремы (также носящей его имя) о конфигурации, состоящей из 9 точек и 9 прямых (рис.3).

Теорема 1. Пусть три сплошные прямые A_1C_1 , A_2C_2 , A_3C_3 пересекают три пунктирные прямые A_1C_2 , A_2C_3 , A_3C_1 в девяти точках. Если две тройки этих точек лежат на двух прямых (отличных от перечисленных), то и оставшаяся тройка точек лежит на прямой.

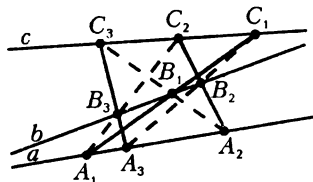


Рис.3. Конфигурация Паппа из 9 точек и 9 прямых. Какие бы тройки точек A_1 , A_2 , A_3 и B_1 , B_2 , B_3 на прямых a и b ни взять, точки C_1 , C_2 , C_3 пересечения прямых A_1B_1 и A_3B_2 , A_2B_2 и A_1B_3 , A_3B_3 и A_2B_1 будут лежать на одной прямой (теорема 1)

Конфигурация Паппа замечательна тем, что все три тройки прямых – тонких, толстых и пунктирных (см. рис.3) – участвуют в ней совершенно равноправно: в каждой из 9 точек пересекаются три прямые разных типов.

Начав строить такую конфигурацию, мы обнаружим, что при неудачном выборе первых шести точек A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , A_3 , B_3 новые точки C_1 , C_2 , C_3 могут оказаться далеко за пределами чертежа. На-

пример, при $A_1B_1 \parallel A_3B_2$ точка C_1 просто «уйдет в бесконечность». (При этом прямая C_2C_3 будет также параллельна A_1B_1 и B_2A_3 .) Если же две из трех точек C_1 , C_2 и C_3 «уходят в бесконечность», то согласно теореме 1,а и третья также должна оказаться в бесконечности»; в этом случае удобно говорить, что все три точки C_1 , C_2 , C_3 лежат на одной «бесконечно удаленной прямой» c .

К этому частному случаю можно свести и самый общий с помощью геометрического преобразования, хорошо знакомого художникам, архитекторам и фотоаграфам — *центральной проекции* (рис.4); художники со времен Леонардо да Винчи и Альбрехта Дюрера называют его «линейной перспективой». Проекция с центром S каждой точке M ставит в соответствие точку M' пересечения прямой SM с некоторой плоскостью p (плоскостью проекции). Важно, что при этом образы точек одной прямой вновь лежат на одной прямой, хотя некоторые пересекающиеся прямые переходят в параллельные (их точка пересечения «уходит в бесконечность») и наоборот.

Замечательна идея Дезарга, лежащая в основе проективной геометрии: мысленно дополнить плоскость «бесконечно удаленными точками», в каждой из которых пересекаются параллельные друг другу прямые, и считать все эти точки лежащими на одной «бесконечно удаленной прямой» — тогда при центральной проекции одной плоскости на другую не возникает никаких исключений, это преобразование становится взаимно однозначным. Эта «проективная» точка зрения будет постоянной побочной темой нашего рассказа, но мы не будем развивать ее здесь подробно (см. [1], [2]).

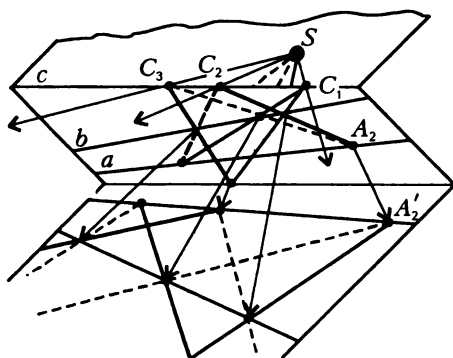


Рис.4. Сведение общей теоремы Паппа к специальному случаю (теореме 1,а). Нарисуем конфигурацию Паппа на стекле или прозрачной бумаге, расположим ее в наклонной плоскости так, чтобы прямая C_1C_2 была горизонтальной, и спроектируем на горизонтальную плоскость с помощью источника света S — центра проекций, — расположенного над плоскостью на той же высоте, что и прямая C_1C_2 . В проекции получится гексаграмма Паппа: пары разнотипных прямых, пересекающихся в точках C_1 , C_2 и C_3 , проектируются в пары параллельных прямых, поэтому C_3 лежит на прямой C_1C_2 .

Конфигурации Паскаля

Теореме Паскаля можно придать тот же вид, что и теореме Паппа о 9 точках.

Теорема 2. Пусть три пунктирные прямые пересекают три сплошные в девяти точках. Если шесть из этих точек лежат на одной окружности, то три остальные лежат на одной прямой (рис. 1).

Верна и в определенном смысле «обратная» теорема.

Теорема 2'. Если из девяти точек пересечения тройки пунктирных с тройкой сплошных прямых три лежат на прямой, а еще пять – на окружности, то и девятая точка лежит на той же окружности.

Как понял сразу же сам Паскаль, его теорему можно значительно обобщить: вместо окружности в ней может фигурировать эллипс, гипербола или парабола, ибо любую из этих кривых можно получить центральной проекцией окружности. Поэтому из конфигурации Паскаля для окружности можно получить конфигурацию для любой из этих кривых.

Все эти кривые называются *кривыми второго порядка*, поскольку каждую из них можно задать уравнением вида $P(x, y) = 0$, где P – многочлен второй степени:

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Любопытно, что теорема Паскаля остается верной и для вырожденного случая, когда многочлен P раскладывается на два линейных множителя: в этом случае кривая второго порядка $P(x, y) = 0$ превращается в пару прямых, а теорема Паскаля – в теорему Паппа.

Существует много различных доказательств теоремы Паскаля для окружности (см., например, [1], [2], [3]).

Интересно, что доказать ее можно тем же способом, каким мы свели общую теорему Паппа к частному случаю – спроектировать конфигурацию Паскаля так, чтобы «паскалева прямая» превратилась в бесконечно удаленную, а окружность – в зависимости от того, пересекалась ли она с прямой s , касалась ее или не имела с ней общих точек – в гиперболу с перпендикулярными асимптотами, параболу или вновь в окружность. Теперь остается доказать аналог теоремы 1, а для шестизвенной ломаной, вершины которой лежат на одной из полученных кривых. Для этого нужно придумать преобразования, при которых кривая скользила бы по самой себе, а параллельные прямые переходили бы в параллельные (такие преобразования называют *линейными*). Для окружности это – обычные повороты, для параболы $y = ax^2$ «неравномерные растяжения» $x' = kx$, $y' = k^2 y$, для гиперболы $xy = a$ – «гиперболические повороты» $x' = kx$, $y' = y/k$.

Кубические кривые

Алгебраической кривой третьего порядка, или *кубической кривой*, называется множество точек (x, y) , удовлетворяющих уравнению $P(x, y) = 0$, где P – многочлен третьей степени: $P(x, y) = ax^3 + bx^2y + \dots + l$ (всего 10 членов). Заметим, что это определение не зависит от выбора системы координат: при переходе от одной системы координат к другой, даже косоугольной, старые координаты выражаются через новые по линейным формулам

$$x = a_1x' + b_1y' + c_1, \quad y = a_2x' + b_2y' + c_2, \quad (1)$$

поэтому в новых координатах кривая будет задаваться также многочленом третьей степени.

Кубическая кривая называется *приводимой*, если многочлен $P(x, y)$ раскладывается в произведение многочленов меньшей (первой и второй) степени, и *неприводимой* – в противном случае. Такую кривую мы будем обозначать иногда буквой Ω – некоторые из очень разнообразных по форме кубических кривых имеют похожий вид. Например, кривая $(x + 1)(x^2 + y^2 - 1) + \varepsilon = 0$ при малом ε (скажем, $\varepsilon = 0,001$) очень близка к приводимой кривой $(x + 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0$, состоящей из прямой $x = -1$ и окружности $x^2 + y^2 = 1$. Если многочлен раскладывается в произведение трех линейных многочленов: $P = L_0L_1L_2$, то кривая $P(x, y) = 0$ будет объединением трех прямых $L_0 = 0$, $L_1 = 0$, $L_2 = 0$.

Оказывается, любой многочлен третьей степени можно представить в виде суммы двух таких «сильно приводимых» многочленов; это будет видно из доказательства следующей теоремы о 9 точках на кубической кривой.

Теорема 3. Пусть три пунктирные прямые пересекают три сплошные в девяти точках. Если восемь из этих точек лежат на некоторой кубической кривой, то и девятая лежит на той же кубической кривой.

В специальном случае, когда кривая приводима, отсюда получаются теоремы Паппа и Паскаля: если кривая распадается на три прямых, то теорема 3 превращается в теорему 1, а если на прямую и кривую второго порядка, то в теоремы 2 и 2'. Таким образом, доказав теорему 3, мы получим одновременно все предыдущие результаты, причем сразу в общем случае!

Пусть прямые $R_i = 0$ и $L_j = 0$ пересекаются в точке A_{ij} (рис.5; i и j принимают значения 0, 1 и 2). Докажем, что если все точки A_{ij} , кроме A_{22} , лежат на кубической кривой $P(x, y) = 0$, то и A_{22}

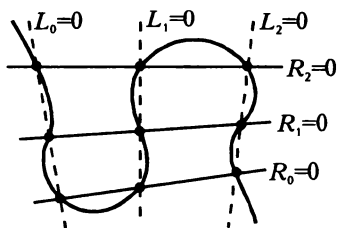


Рис.5. Теорема 3 о 9 точках на кубической кривой. Уравнение кубической кривой Ω , проходящей через 8 из 9 точек, можно получить как линейную комбинацию уравнений $R_0R_1R_2 = 0$ и $L_0L_1L_2 = 0$, задающих тройки сплошных и пунктирных прямых: $\lambda R_0R_1R_2 + \mu L_0L_1L_2$, поэтому кривая Ω обязательно проходит и через девятую точку

– тоже. Положим $K = L_0L_1L_2$, $\Gamma = R_0R_1R_2$ и докажем, что для некоторых чисел λ и μ выполнено тождество $P = \lambda K + \mu \Gamma$. Отсюда будет следовать, что $P = 0$ в точке A_{22} : ведь $K = 0$ на пунктирных прямых, $\Gamma = 0$ на сплошных, так что в точках пересечения выполнены оба эти равенства.

Удобно считать, что прямые $L_0 = 0$ и $R_0 = 0$ – это оси координат, так что $L_0(x, y) = x$, $R_0(x, y) = y$ (этого можно добиться, заменив переменные по формулам (1)); при этом $K(x, y)$ имеет вид

$$x(x - \alpha_1 - \gamma_1 y)(x - \alpha_2 - \gamma_2 y),$$

где α_1 и α_2 – координаты точек A_{01} и A_{02} на оси Ox . Поскольку кривая $P(x, y) = 0$ проходит через точки A_{00} , A_{01} и A_{02} , многочлен $P(x, 0)$ – т.е. многочлен P , рассматриваемый на оси $y = 0$, – обращается в 0 при x , равном 0, α_1 и α_2 , поэтому $P(x, 0) = \lambda x(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ при некотором λ , откуда $P(x, 0) = \lambda K(x, 0)$. Аналогично докажем, что $P(0, y) = \mu \Gamma(0, y)$ при некотором μ (здесь используются точки A_{00} , A_{10} и A_{20}).

Рассмотрим теперь многочлен $G = P - \lambda K - \mu \Gamma$. Он тождественно равен 0 при $x = 0$ (ведь K содержит множитель x), а также и при $y = 0$, поэтому он должен иметь вид $G = xyG_1$, где G_1 – многочлен степени не выше первой (ведь степень G не выше третьей). С другой стороны, в точках A_{11} , A_{12} и A_{21} , где $G = 0$ и $xy \neq 0$, многочлен G_1 должен обращаться в 0, а эти точки не лежат на одной прямой. Это возможно, лишь если G_1 , а с ним и G тождественно равны 0.

Теорема 3 доказана.

Сложение точек на кубической кривой

Многие интересные геометрические свойства кубических кривых, а также их разнообразные применения в анализе, теории чисел и даже комбинаторике (теории кодирования) связаны с операцией сложения точек. Существование такой естественной операции – характерное свойство именно (неприводимых) кривых третьей степени, а ее геометрическое определение основано на том, что прямая, пересекающая кривую Ω в двух точках, обязательно имеет с ней еще и третью точку пересечения. Мы увидим, что теорема 3 выражает замечательное свойство этой операции – ассоциативность: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Сумма $A + B$ двух точек A, B кривой Ω определяется так. На Ω выбирается некоторая «начальная» точка E . По двум точкам A, B строится третья точка D пересечения прямой AB с Ω , а затем — третья точка пересечения с Ω прямой DE ; это и есть, по определению, точка $A + B$.

Особенно просто складываются точки на кривой $y = x^3$ (рис. 6): если за начальную точку E взять начало координат $(0; 0)$, то суммой точек с абсциссами x_1 и x_2 будет точка с абсциссой $x_1 + x_2$! В самом деле, три точки $A(x_1; x_1^3)$, $B(x_2; x_2^3)$, $D(x_3; x_3^3)$ лежат на одной прямой, если выполнено условие

$$\frac{x_1^3 - x_3^3}{x_1 - x_2} = \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 - x_3},$$

которое после упрощений принимает вид

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

а поскольку E — центр симметрии графика $y = x^3$, точка $A + B$ (третья точка пересечения прямой DE с этим графиком) имеет координаты $(-x_3; -x_3^3)$, т.е. абсциссу $-x_3 = x_1 + x_2$.

Чтобы операция сложения точек была определена для любых двух точек, нужно сделать некоторые уточнения: учесть точки касания прямых с Ω как двукратные (а для точек перегиба — трехкратные) точки пересечения, добавить к кривой «бесконечно удаленные» точки, выбросить «особые» точки, появляющиеся на некоторых кривых.

Для такого сложения точек на кривой Ω свойство *коммутативности*: $A + B = B + A$ очевидно (прямая AB совпадает с прямой BA). А вот ассоциативность доказать не так просто. Это удается сделать с помощью теоремы 3, проведя 7 прямых (рис. 7). По этой теореме точка X пересечения пря-

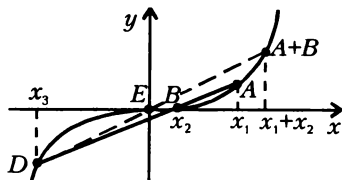


Рис. 6. Сложение точек на графике $y = x^3$. Три точки этого графика лежат на одной прямой, если и только если сумма их абсцисс равна 0

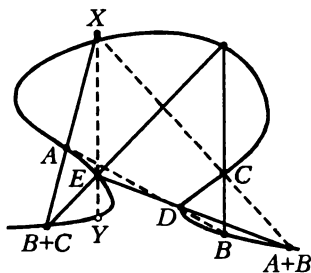


Рис. 7. Ассоциативность сложения точек на кубической кривой. Равенство $A + (B + C) = (A + B) + C$ следует из теоремы о 9 точках

мых, соединяющих A с $B + C$ и $A + B$ с C , лежит на Ω , поэтому

$$A + (B + C) = (A + B) + C = Y.$$

Построение полиграмм

Назовем *полиграммой* тройку бесконечных последовательностей точек на плоскости — A_k , B_l и C_m , для которых выполнено такое условие: если $k + l + m = 0$, то точки A_k , B_l и C_m лежат на одной прямой ($k, l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Этой бесконечной конфигурации была посвящена задача М585 из «Задачника «Кванта». (Интересно, что автор задачи В.В.Батырев прислал нам задачу, когда был еще 10-классником,

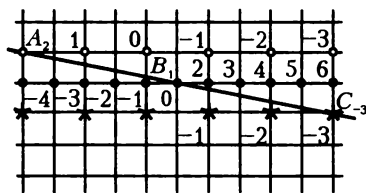


Рис.8. Пример полиграммы. Три бесконечных последовательности точек, занумерованных целыми числами, образуют полиграмму: три точки разных типов A_k , B_l и C_m лежат на одной прямой, если сумма их номеров $k + l + m$ равна 0. (В этом примере B_{-k-m} — середина отрезка $A_k C_m$ для любых k и m .)

а теперь он окончил мехмат МГУ и стал его научным сотрудником — специалистом по алгебраической геометрии.) Самую простую полиграмму легко построить на клетчатой бумаге (рис.8), но оказалось, что существует множество разнообразных полиграмм, причем их описание тесно связано со всем содержанием нашей статьи, включая даже «сложение точек» на кубической кривой.

Попробуйте экспериментально проверить и затем обосновать следующие утверждения (в этом помогут рисунки 9—11, где изображены некоторые примеры полиграмм; номера расставлены лишь у некоторых первых точек — по ним легко восстанавливаются остальные).

1. Для любых трех прямых a , b , c по произвольно заданным точкам A_0 (на a), B_0 и B_1 (на b) строится единственная полиграмма, у которой все точки A_k лежат на a , B_l на b и C_m на c .

2. Пусть заданы окружность σ (это может быть также эллипс, гипербола или парабола) и три точки: A_0 на σ , B_0 и B_1 — не лежащие на σ . Тогда существует единственная полиграмма, у которой все точки A_k и C_m лежат на σ , а B_l — на прямой $B_0 B_1$.

3. Если задана неприводимая кубическая кривая Ω и на ней три точки A_0 , B_0 и B_1 , то по ним однозначно восстанавливается полиграмма,

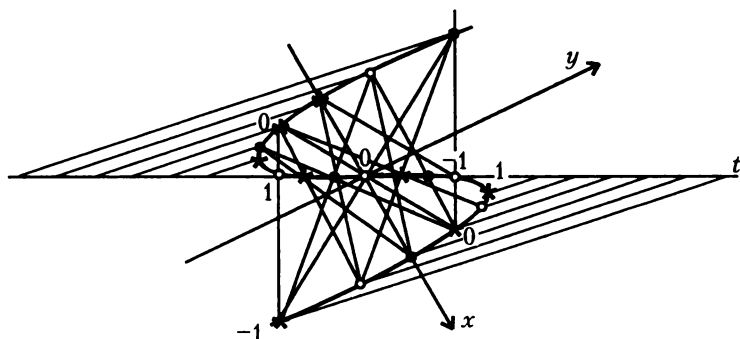


Рис. 11. Полиграмма на графике $y = x^3 - ax$. Проекции точек каждого типа на касательную Ot по направлению оси Oy составляют ряд равноотстоящих точек – арифметическую прогрессию

лежащая на Ω , причем ее можно записать в виде тройки арифметических прогрессий $A_k = A_0 + kD$, $B_l = B_0 + lD$, $C_m = C_0 + mD$ (D – точка на Ω , определяемая условием $B_0 + D = B_1$); правда, если D – такая точка на (неособой) кривой Ω , то $nD = \underbrace{D + \dots + D}_n = E$, полиграмма получится

не бесконечной, а периодической (такие конфигурации рассмотрены в статье [4] в связи с задачей о том, как много троек из заданного числа точек плоскости могут лежать на прямых).

4. Пусть заданы шесть точек A_0 , A_{-1} , A_1 , B_0 , B_1 и B_2 на плоскости (в общем положении). По ним можно однозначно восстановить полиграмму, все точки которой автоматически окажутся лежащими на некоторой кубической кривой.

Для доказательства общих утверждений о полиграммах полезны следующие соображения. Центральная проекция любой полиграммы – снова полиграмма. Каждые 9 точек полиграммы A_k , A_{k+r} , A_{k+s} , B_l , B_{l+r} , B_{l+s} , C_m , C_{m+r} , C_{m+s} , где $k + l + m + r + s = 0$, образуют конфигурацию, удовлетворяющую условиям теоремы 3; в частности, для полиграмм на трех прямых (рис. 9) они образуют 9 точек конфигурации Паппа, а для полиграмм на прямой и окружности (рис. 10) – конфигурации Паскаля.

Шкала из точек с целочисленными номерами, возникающая при построении полиграмм, наводит на мысль, что существует непрерывный аналог полиграмм; в самом деле, оказывается, точкам любой – приводимой или неприводимой – кубической кривой Ω можно сопоставить числовые значения t – ввести на кривой Ω «хорошую параметризацию» так, чтобы для любой прямой, пересекающей Ω в трех точках с параметрами t_1 , t_2 , t_3 выполнялось условие $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. (Если кривая Ω содержит овал, – окружность на рисунке 10, б, – то значение параметра t определяется с точностью до прибавления целого кратного «периода» T , на который меняется значение t при обходе овала.) Как

мы видели (рис.6), на кривой $y = x^3$ «хороший параметр» — это абсцисса точки (x, y) . Приведем еще один пример. Пусть Ω состоит из трех прямых AB, BC, CA . Условие, что точки M, N, L , лежащие соответственно на этих прямых, расположены на одной прямой, имеет вид

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{LC}{LA} = 1$$

(теорема Менелая). Здесь за «хороший параметр» t на каждой прямой можно принять логарифм соответствующего отношения: если произведение трех чисел равно 1, то сумма их логарифмов равна 0. Точно так же можно в явном виде указать «хорошую параметризацию» для других приводимых и особых кубических кривых, таких, как $y^2 = x^3$ и «лист Декарта» $y^2 = x^3 - x^2$ (см. первые страницы книги [6]).

Для неприводимых неособых кубических кривых существование «хорошей параметризации» тесно связано с операцией сложения точек, а ее явное выражение требует знакомства с теорией эллиптических функций — красивейшей областью математического анализа, которой занимались многие крупнейшие математики XIX века.

Сравнительно недавно (1976 г.) американский математик Ф.Гриффитс заметил, что наличие «хорошей параметризации» — характеристическое свойство именно кривых третьего порядка: если на плоскости расположены три кусочка кривых с параметрами t_1, t_2 и t_3 , так что через каждую точку одно из них можно провести прямую, пересекающую два других, и при этом для параметров трех точек пересечения всегда выполнено условие $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, то все эти три кусочка содержатся в одной кубической кривой. (Это — непрерывный аналог утверждения о том, что любая полиграмма лежит на кубической кривой.)

Литература

1. Яглом И.М. *Геометрические преобразования*, ч. II. — М.: Л.: Гостехиздат, 1956.
2. Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии*, ч. II. — М.: Наука, 1986.
3. Шарыгин И.Ф. *Задачи по геометрии. Планиметрия*. — М.: Наука, 1986.
4. *Математический цветник*. — М.: Мир, 1983 (статья С.Барра «Как сажать деревья», с. 117—129).
5. Артин Э. *Геометрическая алгебра*. — М.: Наука, 1969.
6. Шафаревич И.Р. *Основы алгебраической геометрии*. — М.: Наука, 1972.

КОМБИНАТОРИКА – МНОГОЧЛЕНЫ – ВЕРОЯТНОСТЬ

Для чтения этой статьи достаточно знания курса математики в объеме первых шести классов, но мы уверены, что и старшеклассники найдут для себя здесь интересное – речь пойдет о комбинаторных формулах и их применениях. Одни и те же комбинаторные рассуждения и формулы пронизывают разные области математики и ее приложений. Цель статьи – показать одну такую связывающую линию: комбинаторика – алгебра многочленов – теория вероятностей.

Факториал

Для вычисления суммы первых n натуральных чисел есть удобная формула

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для произведения первых n натуральных чисел такой формулы нет, но зато эта часто встречающаяся в комбинаторике и других разделах математики величина имеет специальное обозначение: $n!$ (читается «эн факториал»). Выбор для обозначения восклицательного знака, возможно, связан с тем, что даже для сравнительно небольших значений n число $n!$ очень велико: чтобы продемонстрировать, как быстро растет $n!$ с ростом n , выпишем эти числа для n от 1 до 10:

$$\begin{aligned} 1! &= 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, 4! = 3! \cdot 4 = 24, 5! = \\ &= 4! \cdot 5 = 120, 6! = 720, 7! = 5040, 8! = 40\,320, 9! = \\ &= 362\,880, 10! = 3\,628\,800. \end{aligned}$$

Из определения $n!$ видно, что факториалы двух соседних натуральных чисел n и $n+1$ связаны формулой

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1), \quad (*)$$

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером

– чтобы получить произведение чисел от 1 до $n + 1$, надо произведение от 1 до n умножить еще на $(n + 1)$.

Заметим, что если в это равенство подставить $n = 0$, то получится $1! = 0! \cdot 1$, поэтому полагают $0! = 1$; это соглашение часто оказывается удобным в различных общих формулах.

Задачи

1. Найдите число $n!$ для $n = 11, 12$.
2. Может ли $n!$ кончатся ровно на пять нулей? (При каком наименьшем n число $n!$ будет оканчиваться на шесть нулей?).
3. Докажите формулу $(n + 1)! - n! = n! \cdot n$.
4. Найдите сумму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 9 \cdot 9!$. (Замените каждый член на разность по формуле из предыдущей задачи.)
5. Проверьте равенство (где $0 < k \leq n$)

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

при $n = 7$ и $k = 3$ и докажите, что оно верно при любых натуральных числах n и k .

6. Найдите четыре тройки чисел x, y, z , для которых верно равенство $x! \cdot y! = z!$. (Подставьте в формулу $(*)$ $n = k! - 1$.)

Перестановки

Факториал возникает самым естественным образом, когда мы подсчитываем количество перестановок из разных предметов.

Возьмем 4 буквы: К, О, Р, Т и посмотрим, сколькими способами их можно расположить в один ряд, т.е. сколько существует слов из этих букв. Оказывается, что число этих способов равно $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. В самом деле, на первое место можно поставить любую из 4 букв, на второе – любую из 3 оставшихся, на третье – любую из 2 неиспользованных на первых двух местах букв, и, наконец, на четвертом месте окажется оставшаяся буква. Все эти перестановки выписаны в алфавитном порядке на рисунке 1. Перестановки букв некоторого слова называют его *анаграммами*.



Рис. 1

Еще один пример. Рассмотрим все перестановки 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Их можно рассматривать как десятизначные числа, если они не начинаются с нуля, и как девятизначные числа, если они начинаются с нуля. Количество всех таких чисел равно $10!$.

Эти примеры иллюстрируют общее утверждение:

Количество перестановок из n различных предметов равно $n!$.

Часто требуется среди всех перестановок выбрать все те, которые обладают определенным свойством. Например, из выписанных на рисунке 1 анаграмм слова КОРТ только одна (не считая самого слова корт) имеет смысл в русском языке: крот; а среди $10!$ указанных чисел мы знаем четыре числа, которые делятся одновременно на все числа от 2 до 18: 2 438 195 760, 3 785 952 160, 4 753 869 120, 4 876 391 520. Для того чтобы найти осмысленные анаграммы или найти указанные числа среди $10!$ чисел, нужно произвести перебор многих случаев. Подобные задачи постоянно возникают на производстве и в экономике, когда надо найти наилучшие варианты.

Перебор $10!$ перестановок труден не только для человека, но даже для современной вычислительной машины. По этому поводу автор замечательного многотомного труда «Искусство программирования» Д.Кнут пишет: «Стоит помнить, что $10!$ – это примерно 3,6 миллиона. В некотором смысле число $10!$ является приблизительно границей между тем, что можно сосчитать на компьютере, и тем, что нельзя. Если алгоритм требует испытания более чем $10!$ случаев, то счет может занять слишком много машинного времени, чтобы быть практически осуществимым. С другой стороны, если мы должны проверить $10!$ случаев, и каждый случай требует, скажем, одной миллисекунды машинного времени, то общее время счета составит примерно один час». Поэтому интересно находить такие соображения, которые позволяют существенно сократить полный перебор или вообще избежать его.

Задачи

7. а) Сколько анаграмм у слова НИСЕЛЬАП?

б) Найдите среди них два слова, одно – название фрукта, другое – породы собаки.

8. Найдите два девятизначных числа, составленных из всех цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, чтобы одно из них было больше другого в 8 раз.

9. а) Вершины нарисованного на плоскости правильного шестиугольника нужно обозначить буквами A, B, C, D, E, F . Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколько среди этих способов таких, что в результате получится шестиугольник $ABCDEF$? (Буквы могут идти по часовой стрелке, а могут идти и против часовой стрелки.)

10. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

Перестановки с повторениями

Отношения факториалов возникают при подсчете перестановок с повторениями. Например, число анаграмм слова БАОБАБ равно $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$.

Поясним, почему это так. В этом слове 3 раза повторяется буква Б, 2 раза буква А и один раз буква О. Представим себе, что все буквы в этом слове разные: три буквы Б и две буквы А можно раскрасить разными цветами. Итак, мы имеем 6 разных знаков, и количество их перестановок равно $6!$. Но тогда каждой анаграмме слова БАОБАБ: ОААБББ, БОААББ, ААОББА, ... соответствует $3!2!$ перестановок (рис.2), ведь мы можем в нем $3!$ способами переставить разноцветные буквы А.

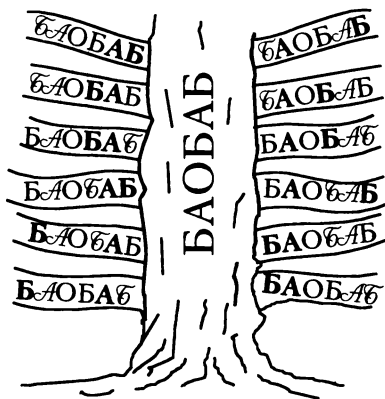


Рис. 2

Оказывается, что для числа перестановок с повторениями имеется общая формула.

Если слово имеет n_1 букв A_1 , n_2 букв A_2 , ..., n_r букв A_r , то количество его анаграмм равно

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_r)!}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

Конечно, эта формула применима для перестановок с повторениями любых предметов. Например, количество перестановок цифр 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3 равно

$$\frac{7!}{4!2!1!} = \frac{4!5 \cdot 6 \cdot 7}{4!2} = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 105.$$

Задачи

11. Сколько различных анаграмм у слов: а) реестр; б) анаграмма?

12. Сколькими способами мама может в течение недели выдать дочке 3 банана, 2 груши и 2 апельсина, если каждый день будет давать ей по одному фрукту?

13. Расшифруйте фразу, в которой вместо каждого слова стоит его анаграмма:

НЕДОВЖЕНЕ ЧАЙТЕТИ ЛУРАНЖ ВТАНК!

14. Сколькими способами можно составить ожерелье из одной черной, двух белых, трех красных и пяти голубых бусинок?

Степень суммы

Комбинации букв – анаграммы – естественно возникают при перемножении двух или нескольких многочленов, а комбинаторные коэффициенты – количества анаграмм – при приведении подобных членов.

Хорошо известна формула квадрата суммы двух чисел:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Похожую формулу можно получить и для квадрата суммы трех и большего числа слагаемых. Возведем, например, сумму $a + b + c$ в квадрат:

$$\begin{aligned}(a + b + c)(a + b + c) &= aa + ab + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.\end{aligned}$$

Аналогичная формула верна и для $(a + b + c)^2$ (на рисунке 3 каждый одночлен выражает площадь своего прямоугольника); вообще, квадрат суммы n чисел вычисляется так: надо сложить все квадраты этих n чисел и прибавить удвоенную сумму всевозможных попарных произведений этих чисел.

Если аккуратно перемножить $a + b + c$ три раза на себя, получится такая формула:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + \\ &+ 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.\end{aligned}$$

Объясним, как можно получить возникающие здесь коэффициенты 1, 3 и 6 без утомительного умножения и собирания подобных членов. Это – уже знакомые нам количества анаграмм. Член a^3 может получиться только одним способом – когда из каждой скобки

$$(a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)$$

берется буква a . Чтобы получить коэффициент при a^2b , нужно из одной скобки взять b , а из двух других a , т.е. этому члену соответствуют анаграммы aab , aba , baa из двух букв a и одной буквы b : их количество равно $(2 + 1)!(2!1!) = 3$.

	a	b	c	d
a	aa	ab	ac	ad
b	ba	bb	bc	bd
c	ca	cb	cc	cd
d	da	db	dc	dd

$$S = (a + b + c + d)^2$$

Рис. 3

Наконец, коэффициент при abc равен числу $3!/(1!1!1!) = 6$ анаграмм (перестановок) слова из трех различных букв a, b, c .

Аналогичная формула получится и для куба суммы большего числа слагаемых, например

$$(a + b + c + d + e)^3 = (a^3 + \dots) + 3(a^2b + \dots) + 6(abc + \dots). \quad (**)$$

Здесь многоточием в каждой скобке обозначены члены, получаемые из первого выписанного члена всевозможными заменами букв.

Укажем теперь общую формулу.

Коэффициент при $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_r^{n_r}$, получающийся при возведении в n -ю степень суммы $a_1 + a_2 + \dots + a_r$ из r слагаемых (здесь $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, $n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_r \geq 0$), равен числу анаграмм слова из n_1 букв A_1, n_2 букв A_2, \dots, n_r букв A_r , т.е. $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$.

(Разумеется, если некоторое число n_j равно 0, то $a_j^{n_j} = 1$, значит, буква a_j в таком одночлене отсутствует; напомним, что $0! = 1$.)

Вернемся к формуле (**). Интересно, что вопрос: «сколько членов будет в каждой скобке?» также сводится к подсчету перестановок с повторениями. Выпишем в строчку все наши 5 букв и под каждой будем писать показатель, с которым она входит в соответствующий одночлен. (Если буква не входит в одночлен, то пишем показатель 0). Тогда каждому одночлену в скобке $(a^2 + \dots)$ соответствует «слово» из 5 чисел: одной двойки, одной единицы и трех нулей, поэтому их общее количество равно $5!(3!1!1!) = 20$; в скобке $(a^3 + \dots)$ будет столько же членов, сколько анаграмм у «слова» 30000, т.е. $5!/(4!1!) = 5$; наконец, членов вида $(abc + \dots)$ будет $5!(3!2!) = 10$ (рис.4).

	<i>abcde</i>		<i>abcde</i>		<i>abcde</i>
a^2b	21000	a^3	30000	abc	11100
b^2c	02100	b^3	03000	abd	11010
b^2a	12000	c^3	00300	abe	11001
...

Рис. 4

Можно проверить, что мы не ошиблись, подсчитав общее число всех одночленов до приведения подобных — иными словами, подставив в формулу (**) вместо всех букв число 1; при этом слева получится 5^3 , а справа $5 + 3 \cdot 20 + 6 \cdot 10$.

Задачи

15. Сколько членов получится после умножения:

$$(a + b + c + d)(x + y + z)(u + v)?$$

(Указание. Подставьте вместо букв единицы.)

16. Найдите наибольший коэффициент многочлена:

а) $(a + b + c + d + e)^5$; б) $(a + b + c + d)^5$.

17. В формуле $(a + b + c + d + e)^4 = K_1(a^4 + \dots) + K_2(a^3b + \dots) + K_3(a^2b^2 + \dots) + K_4(a^2bc + \dots) + K_5(abcd + \dots)$ найдите коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 . Сколько членов в каждой круглой скобке?

Один способ подсчета вероятностей

Из повседневного опыта известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью $1/2$ и маслом вверх – тоже $1/2$. Правда, некоторые считают, что вероятность первого исхода 0,9, а второго – 0,1. Но, наверное, никто не сомневается, что вероятность выпадения шестерки при бросании игрального кубика равна $1/6$, а двух шестерок подряд – $1/36$.

Эти примеры поясняют, что вероятность – это некоторое число между 0 и 1, количественно выражающее шанс наступления того или иного исхода (маслом вниз или вверх) случайного события (падения бутерброда), причем сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1.

После того, как каждому исходу приписана некоторая вероятность, интересно находить вероятности более сложных событий. Эта задача включает в себе большие математические трудности. Один из способов подсчета вероятностей сложных событий связан с таким простым наблюдением: если сумма нескольких положительных чисел равна 1, то степень этой суммы тоже равна 1. Оказывается, что каждому одночлену, возникающему при возведении суммы в степень, можно придать вероятностный смысл. Как это делается – покажем на таком искусственном примере.

В магазине лежит большая куча перцев, причем $1/3$ из них – красные, $1/2$ – желтые, $1/6$ – зеленые. Если продавец, не глядя, выбирает из кучи один перец, то мы полагаем вероятность, что он окажется красным (к), равной $1/3$, желтым (ж) $1/2$, зеленым (з) $1/6$.

Если продавец выбирает, не глядя, два перца, то возможны такие случаи: кк, кж, кз, жк, жз, жж, зк, зж, зз. Вероятность каждого из них считается равной произведению вероятностей появления отдельных букв, составляющих пару:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

Сумма все 9 чисел равна 1, так как они появляются при возведении в квадрат числа $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$.

Чтобы найти вероятность того, что среди двух взятых перцев есть красный и зеленый, надо сложить вероятности случаев кз и зк:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

Обратим внимание на то, что это действие соответствует следующему: надо возвести $(к + з + с)$ в квадрат и привести подобные члены кз и зк – в результате получится 2кз, а затем подставить вместо букв к и з их вероятности.

Пользуясь правилом нахождения коэффициента при возведении в степень, можно определять и вероятности более длинных комбинаций. Например, если продавец, не глядя, выбирает один за другим пять перцев, то вероятность, что среди них окажется 3 красных, 1 желтый и 1 зеленый, вычисляется так:

$$\frac{5!}{3!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{81},$$

ведь $\frac{5!}{3!1!1!} k^3 жз$ – это одночлен, который получится в многочлене $(к + ж + з)^5$ после возведения в степень и приведения подобных членов, т.е. сумма вероятностей анаграмм слова кккжз.

Интересно, что случаи «2 красных и 3 желтых», а также «2 красных, 2 желтых и 1 зеленый» имеют одинаковую вероятность

$$\frac{5!}{2!3!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5!}{2!2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}.$$

(Это – наиболее вероятные комбинации 5 перцев при выбранных нами вероятностях.)

Задачи

18. Все три ребра куба $6 \times 6 \times 6$, исходящие из вершины А, поделили в отношении 3:2:1, считая от вершины А, и через точки деления провели плоскости, параллельные граням, разрезающие кубик на 21 кусок.

- Сколько из них будут брусками $3 \times 2 \times 1$?
- Сколько еще и каких будет кусков? Каковы их объемы?
- Имеется ли связь между этой задачей и задачей про перцы?

19. Автомат составляет ожерелья из 6 бусинок, выбирая их случайно из большой кучи черных, белых, красных и голубых бусинок, смешанных в соотношении 1:2:3:4. С какой вероятностью в таком ожерелье

- все бусинки голубые;
- все – одного цвета;
- не будет ни одной красной бусинки;
- встретятся бусинки всех четырех цветов?
- Какие ожерелья будут попадаться чаще всего?

е) Каким нужно взять соотношение бусинок в большой куче, чтобы чаще всего встречались ожерелья с 2 красными, 2 черными, одной белой и одной голубой бусинками?

20. Пусть вероятность падения бутерброда маслом вниз равна $3/4$. Произошло случайное событие: поднос с семью бутербродами опрокинулся. Какова вероятность, что ровно k бутербродов упадут маслом вниз (для каждого $k = 0, 1, 2, \dots, 7$)?

Возведите в степень $(p+q)^7$ и подсчитайте каждый одночлен при $p = 3/4$, $q = 1/4$. Для вычислений коэффициентов можно воспользоваться микрокалькулятором.

Биномиальные коэффициенты

Выше мы почти не затрагивали самый простой и, пожалуй, самый важный случай двух букв. Коэффициенты многочлена $(a+b)^n$ имеют специальное обозначение C_n^k , а формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

называется формулой *бинома Ньютона*. Мы знаем, что C_n^k — количество слов из n букв, среди которых k букв b и $n-k$ букв a — можно найти по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Например,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

поскольку

$$C_4^0 = C_4^4 = \frac{4!}{4!0!} = 1,$$

$$C_4^1 = C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4, \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Биномиальные коэффициенты — числа C_n^k — возникают в самых различных задачах комбинаторики, алгебры, геометрии, математического анализа, теории вероятностей. Они связаны многочисленными красивыми тождествами; например, из равенства $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ (см. задачу 5) следует, что при всех натуральных n и k , $0 \leq k < n$,

$$C_n^k + C_{n+1}^k + \dots + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

(для $k = 1$ это — формула, с которой мы начали статью).

СТАТЬИ Н.Б.ВАСИЛЬЕВА В ЖУРНАЛЕ «КВАНТ»

- 1970 г. **Кривые дракона** (в соавторстве с В.Гутенмахером), №2, с.36.
Метрические пространства, №10, с.11; повторно опубликовано в №1 за 1990 г.
- 1972 г. **Расстановка кубиков**, №4, с.4.
Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н.Вагутен), №6, с.30.
- 1973 г. **Числа S_n^k , многочлены, последовательности** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н.Вагутен), №2, с.27; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №5/97 («Задачник «Кванта», вып.3).
Упаковка квадратов (в соавторстве с Г.Гальпериным), №4, с.35.
Последовательность прыжков, №11, с.25.
- 1974 г. **Задачи о графах или сказка «Иван-царевич и серый волк»** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н.Вагутен), №11, с.23.
Семейство параллельных n -угольников, №11, с.32; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №1/98 («Математический кружок», вып.1).
Вокруг формулы Пика, №12, с.39.
- 1975 г. **Ближние дроби** (в соавторстве с В.Гутенмахером; опубликовано под псевдонимом В.Н.Вагутен), №8, с.33.
- 1976 г. **Сложение фигур**, №4, с.22; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №1/98 («Математический кружок», вып.1).
- 1977 г. **Плавные последовательности** (в соавторстве с А.Толпыго), №6, с.30.
- 1979 г. **Арифметические препятствия** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом Н.Вагутен), №3, с.22.
- 1980 г. **Сопряженные числа** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом Н.Вагутен), №2, с.26.
- 1981 г. **Формула площади** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом Н.Вагутен), №4, с.17.
Рассмотрим разность (в соавторстве с Т.Маликовым), №6, с.27.
- 1982 г. **Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения** (в соавторстве с А.Зелевинским), №1, с.12.

- 1983 г. **Арифметика и принципы подсчета** (в соавторстве с В.Гутенмахером), №1, с.30; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №2/94 («Школа в «Кванте»).
- 1985 г. **Пары чисел и действия с ними** (в соавторстве с В.Гутенмахером), №1, с.19.
Задача о восьми точках, №3, с.39.
- 1986 г. **Комбинаторика – многочлены – вероятность** (в соавторстве с В.Гутенмахером), №1, с.19.
- 1987 г. **Гексаграммы Паскаля и кубические кривые**, №8, с.2.
- 1989 г. **Средние линии** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н.Вагутен), №6, с.46.
Правильные многоугольники и повороты (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н.Вагутен), №10, с.46.
- 1991 г. **Геометрические вероятности**, №1, с.47.
- 1995 г. **Вокруг уравнения Маркова** (в соавторстве с В.Сендеровым и А.Скопенковым), №6, с.36.
- 1996 г. **Про угол $\frac{\pi}{7}$ и $\sqrt{7}$** (в соавторстве с В.Сендеровым), №2, с.20.
- 1997 г. **Посчитаем вероятности** (в соавторстве с А.Спиваком), №4, с.31.
Разбиения, ГС-перестановки и деревья (в соавторстве с Л.Когановым), №6, с.2.

Приложение к журналу «Квант» № 6/98

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ

ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ

Редактор *А.Ю.Котова*
 Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*
 Технический редактор *Е.В.Морозова*
 Компьютерная группа
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ИБ № 35

117296 Москва, Ленинский пр , 64А,
 «Квант»

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская
 Печать офсетная Усл печ л 6,72
 Заказ 478 6

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
 Чеховском полиграфическом комбинате
 Комитета Российской Федерации по печати
 142300 г.Чехов Московской области

18-40

Индекс 70465